

Zum Paradoxon der Wärmeleitungstheorie*

INGO MÜLLER

Institut für theoretische Physik
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Eingegangen am 29. August 1966

It is shown that the paradox of FOURIER's heat conduction theory (propagation of temperature disturbances with infinite velocity) is a consequence of an insufficient description of the thermodynamical state in nonequilibrium. Taking heat flow and flow of momentum as additional state variables and thoroughly investigating the equation of entropy balance, we derive an extended theory of thermodynamics of irreversible processes, which can be shown to remove the paradox of heat conduction theory for materials with appropriate equations of state. The velocity of temperature propagation is calculated explicitly for a one atomic ideal gas using an approximate solution of the Boltzmann equation.

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die Beseitigung des Paradoxons der Wärmeleitungstheorie. Darunter versteht man die Folgerung der üblichen Thermodynamik der irreversiblen Prozesse (T.I.P.), nach der sich Temperaturstörungen mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten müßten¹.

Es werden einkomponentige fluide Medien betrachtet. Für diese wird in der T.I.P. angenommen, daß ein Nichtgleichgewichtszustand ebenso wie ein Gleichgewichtszustand durch Angabe der spezifischen inneren Energie $e(\vec{x}, t)$ und der Dichte $\rho(\vec{x}, t)$ vollständig beschrieben ist.

Das Paradoxon der Wärmeleitungstheorie ist eine direkte Folge dieser Hypothese. In der vorliegenden Arbeit wird dagegen angenommen, daß im Nichtgleichgewicht zur vollständigen Zustandsbeschreibung zusätzlich zu $e(\vec{x}, t)$ und $\rho(\vec{x}, t)$ noch der Wärmefluß $q_i(\vec{x}, t)$ und der Impulsfluß (abzüglich des Impulsflusses im Gleichgewicht) $p_{ij}(\vec{x}, t)$ angegeben werden müssen. Mit dieser Annahme läßt sich das Paradox der Wärmeleitungstheorie beseitigen.

Darüber hinaus zeigt sich, daß die Entropiebilanz hier nicht zu einer eindeutigen Entropieproduktion führt. Die Freiheit, die man bei der Interpretation der Entropiebilanz hat, wird durch Einführung zusätzlicher Terme berücksichtigt.

* Auszug aus der Aachener Dissertation: „Zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen in kontinuierlichen Medien“ von I. MÜLLER.

¹ CATTANEO, C.: Atti del Seminario matematico e fisico della Università di Modena 3, 3—21 (1948).

Die Überlegungen zur kinetischen Gastheorie einatomiger idealer Maxwellgase im zweiten Teil dieser Arbeit bestätigen die vorgeschlagenen Erweiterungen. Es ist nämlich möglich, die in der T.I.P. auftretenden Größen als Größen 0., 1., 2., ... Ordnung in Zustandsänderungen über freie Weglängen bzw. während Stoßzeiten anzusehen. Dann berücksichtigt die übliche T.I.P. alle Größen bis einschließlich solcher 1. Ordnung, die erweiterte T.I.P. alle bis zur 2. Ordnung.

Die kinetische Gastheorie gestattet die Berechnung der im phänomenologischen Teil dieser Arbeit eingeführten Materialgrößen. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Temperaturstörungen erhält man dann eine Geschwindigkeit in der Größenordnung der mittleren Teilchengeschwindigkeit in einem Maxwellgas.

Insbesondere zeigt die Arbeit, daß eine Auflösung des Paradoxons der Wärmeleitungstheorie nicht erst in einer relativistischen Theorie zu suchen ist. Tatsächlich sind für die konsequente lorentz-kovariante Formulierung der hier vorgeschlagenen erweiterten T.I.P. keine wesentlichen neuen Gesichtspunkte erforderlich. Diese Formulierung basiert auf den Arbeiten von ECKART² und MEIXNER³; auf ihre Wiedergabe muß hier verzichtet werden; es wird auf die Dissertation verwiesen.

1. Phänomenologische Thermodynamik eines einkomponentigen isotropen Mediums

*Bilanzgleichungen*⁴

In diesem Kapitel wird ein fluides einkomponentiges Medium betrachtet. Seine Bewegung ist gekennzeichnet durch das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{x}, t)$.

Sei N eine extensive Größe, $n(\vec{x}, t)$ ihr spezifischer Wert und $\rho(\vec{x}, t)$ die Dichte des Mediums, dann gilt folgende Bilanzgleichung

$$\rho \frac{dn}{dt} + \frac{\partial \Phi_i^n}{\partial x_i} = \sigma^n \quad (1)$$

(über zweimal auftretende Indizes wird summiert). Hierbei sind $\vec{\Phi}^n(\vec{x}, t)$ die Flußdichte von n bezüglich des mit der Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ bewegten Systems (lokales Ruhesystem) und $\sigma(\vec{x}, t)$ die Produktionsdichte von N .

² ECKART, C.: Phys. Rev. **58**, 919 (1940).

³ MEIXNER, J.: Relativistic thermodynamics of irreversible processes in a one component fluid in the presence of an electromagnetic field. (1961). Nicht veröffentlicht.

⁴ MEIXNER, J., u. H. G. REIK: Handbuch der Physik, Bd. III/2, S. 419. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1959.

Dynamik⁴

Spezialfälle der Bilanzgleichung (1) sind

$$\text{der Massenerhaltungssatz} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\text{der Impulserhaltungssatz} \quad \rho \frac{du_k}{dt} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} = 0, \quad (P_{ik} = P_{ki}), \quad (3)$$

$$\text{die Energiebilanz} \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = -P_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (4)$$

In (3) und (4) sind die folgenden Größen eingeführt worden:

- P_{ik} Komponenten des Impulsflutensors im lokalen Ruhssystem,
- ε spezifischer Wert der Energie nach Abzug der spezifischen kinetischen Energie $\frac{1}{2}u^2$,
- q_k Komponenten des Wärmeflusses.

Thermodynamik

In der üblichen T.I.P. beschreibt man den Nichtgleichgewichtszustand eines einkomponentigen fluiden Mediums durch Angabe des Feldes der spezifischen inneren Energie $e(\vec{x}, t)$ und des Dichtefeldes $\rho(\vec{x}, t)$ und erzielt damit gute Erfolge bei der Beschreibung von nicht zu schnellen Zustandsänderungen.

Das Auftreten des Paradoxons der Wärmeleitungstheorie weist jedoch auf die Notwendigkeit einer Abänderung der T.I.P. hin. In dieser Arbeit wird darum vorgeschlagen, den Nichtgleichgewichtszustand eines einkomponentigen fluiden Mediums durch folgende Felder zu beschreiben

- $e(\vec{x}, t)$ spezifische innere Energie,
- $\rho(\vec{x}, t)$ Dichte,
- $q_i(\vec{x}, t)$ Wärmeflußkomponenten,
- $p_{ij}(\vec{x}, t) = P_{ij} - p \cdot \delta_{ij}$ Impulsflutensor abzüglich des thermodynamischen Drucktensors $p(e, \rho) \delta_{ij}$.

Das grundlegende Postulat lautet nun:

Es existiert im Nichtgleichgewicht ein spezifisches Entropiefeld $s(\vec{x}, t)$, so daß s von Ort und Zeit nur über die Felder $e(\vec{x}, t)$, $\rho(\vec{x}, t)$, $q_i(\vec{x}, t)$ und $p_{ij}(\vec{x}, t)$ abhängt, d.h.

$$s(\vec{x}, t) = s(e, \rho, q_i, p_{ij}) = s(e, \rho, q_i, \bar{p}_{ij}, p_{11}), \quad \bar{p}_{ij} = p_{ij} - \frac{1}{3} p_{11} \delta_{ij} \quad (5)$$

und daß im abgeschlossenen System diese Entropie nicht abnehmen kann.

Definiert man

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial e} &= \frac{1}{T}; & \frac{\partial s}{\partial \rho} &= -\frac{\pi}{\rho^2 T}; & \frac{\partial s}{\partial q_i} &= -\frac{A_i}{T}; \\ \frac{\partial s}{\partial \bar{p}_{ij}} &= -\frac{\bar{B}_{ij}}{T} (\bar{B}_{ij} = \bar{B}_{ji}, B_{ii} = 0); & \frac{\partial s}{\partial p_{ii}} &= -\frac{F}{T}, \end{aligned} \quad (6)$$

so ergibt sich eine erweiterte Gibbsche Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{de}{dt} - \frac{\pi}{\rho^2 T} \frac{d\rho}{dt} - \frac{A_i}{T} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\bar{B}_{ij}}{T} \frac{d\bar{p}_{ij}}{dt} - \frac{F}{T} \frac{dp_{ii}}{dt}. \quad (7)$$

Es wird nun eine Näherung eingeführt. Von 1. Ordnung klein seien Größen, die im Gleichgewicht verschwinden, von 2., 3., ... Ordnung seien Produkte aus 2, 3, ... Faktoren 1. Ordnung. Größen von höherer als 2. Ordnung sollen vernachlässigt werden.

Diese Näherung gestattet eine Einschränkung der möglichen Funktionen $s = s(e, \rho, q_i, \bar{p}_{ij}, p_{ii})$ in ihrer Abhängigkeit von q_i , $\bar{p}_{ij}$ und p_{ii} , denn da s skalar ist, kann es nur von skalaren Kombinationen von q_i und p_{ij} abhängen, also folgt in der betrachteten Näherung für ein isotropes Medium

$$s = s(e, \rho, q_i q_i, \bar{p}_{ij} \bar{p}_{ij}, p_{ii}). \quad (8)$$

Entwickelt man (8) bis zu Größen 2. Ordnung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} s(e, \rho, q_i q_i, \bar{p}_{ij} \bar{p}_{ij}, p_{ii}) - s(e, \rho) \\ = \frac{\Theta(e, \rho)}{T} p_{ii} - \frac{\alpha(e, \rho)}{2T} q_i q_i - \frac{\beta(e, \rho)}{2T} \bar{p}_{ij} \bar{p}_{ij} - \frac{\Delta(e, \rho)}{2T} p_{ii}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Nach obigem Postulat muß die rechte Seite für alle q_i und p_{ij} nicht-positiv sein. Daraus folgt

$$\Theta = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \Delta \geq 0 \quad (10)$$

und durch Vergleich von (9) mit (7) ergibt sich

$$A_i = \alpha q_i, \quad \bar{B}_{ij} = \beta \bar{p}_{ij}, \quad F = \Delta p_{ii}. \quad (11)$$

T und π in (7) stimmen wegen (6) und (9) bis auf Größen 2. Ordnung mit Temperatur und Druck (=Impulsfluß im Gleichgewicht) in der üblichen T.I.P. überein.

Wegen (11) nimmt also (7) in der betrachteten Näherung die spezielle Gestalt an

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2 T} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\alpha q_i}{T} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\beta \bar{p}_{ij}}{T} \frac{d\bar{p}_{ij}}{dt} - \frac{\Delta p_{ii}}{T} \frac{dp_{ii}}{dt}. \quad (12)$$

Entropiebilanz und phänomenologische Gleichungen

Postuliert man, wie in der T.I.P. üblich, die Gleichheit von thermodynamischer innerer Energie e und Gesamtenergie ε bezüglich des lokalen Ruhesystems, so kann (12) mit den dynamischen Grundgleichungen verknüpft werden; es ergibt sich nach leichter Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) \\ = - \frac{q_i}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + \alpha \rho T \frac{dq_i}{dt} \right) - \frac{\bar{p}_{ij}}{T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \beta \rho \frac{d\bar{p}_{ij}}{dt} \right) - \\ - \frac{p_{il}}{T} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Delta \rho \frac{dp_{il}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Gleichung hat die Form einer Entropiebilanzgleichung. Man könnte die rechte Seite von (13) als Entropieproduktion ansprechen und aus der Forderung, daß diese nichtnegativ sei, phänomenologische Gleichungen gewinnen.

Aber (13) behält die Form einer Entropiebilanz, wenn auf beiden Seiten die Divergenz eines Vektors N_i addiert wird. Man wird verlangen, daß N_i sich aus Vektoren zusammensetzt, die den Zustand des Mediums charakterisieren, also aus q_i und $\bar{p}_{ij} q_j$ in der betrachteten Näherung. Außerdem soll N_i die Existenz von phänomenologischen Ansätzen gewährleisten, die zu einer nichtnegativen Entropieproduktion führen; das bedeutet, daß N_i von 2. Ordnung klein sein muß.

Damit folgt, daß um der Allgemeinheit willen zu beiden Seiten von (13) die Divergenz von

$$N_i = -L p_{il} q_i - K \bar{p}_{ij} q_j$$

hinzugefügt werden muß. L und K sind unbestimmte Koeffizienten, die in der betrachteten Näherung noch von e und ρ abhängen können.

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} - L p_{il} q_i - K \bar{p}_{ij} q_j \right) \\ = - \frac{q_i}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + L T^2 \frac{\partial p_{il}}{\partial x_i} + \alpha \rho T \frac{dq_i}{dt} + K T^2 \frac{\partial \bar{p}_{il}}{\partial x_i} \right) - \\ - \frac{\bar{p}_{ij}}{T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \beta \rho \frac{d\bar{p}_{ij}}{dt} + K T \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) - \\ - \frac{p_{il}}{T} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Delta \rho \frac{dp_{il}}{dt} + L T \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Gl. (14) wird nun als Entropiebilanz interpretiert, ihre rechte Seite als Entropieproduktion. Von dieser wird gefordert, daß sie nichtnegativ sei. Diese Forderung erfüllt man in üblicher Weise durch die folgenden linearen phänomenologischen Ansätze

$$q_i = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + L T^2 \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} + \alpha \rho T \frac{dq_i}{dt} + K T^2 \frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial x_k} \right) \quad \kappa \geq 0, \quad (15)$$

$$\bar{p}_{ij} = -2\eta \left(\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \beta \rho \frac{d\bar{p}_{ij}}{dt} + K T \left\langle \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right\rangle \right) \quad \eta \geq 0, \quad (16)$$

$$p_{li} = -\zeta \left(3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 9 \Delta \rho \frac{dp_{li}}{dt} + 9 L T \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) \quad \zeta \geq 0. \quad (17)$$

Diese Ansätze unterscheiden sich von denjenigen der üblichen T.I.P. durch die Terme mit den Koeffizienten α , β , Δ , K und L . In (16) wurde gesetzt

$$\langle A_{ik} \rangle = \frac{1}{2} (A_{ik} + A_{ki}) - \frac{1}{3} A_{li} \delta_{ik}.$$

Die Koeffizienten der Ableitungen in (15) bis (17) hängen in dieser linearen Näherung nicht mehr von den neu eingeführten Variablen q_i , $\bar{p}_{ij}$ und p_{li} ab. Das gleiche gilt für die folgenden Gln. (18) bis (22), ohne daß dies in der Bezeichnung kenntlich gemacht wird.

*Das vollständige Gleichungssystem
zur Behandlung von Schall- und Wärmeausbreitungsvorgängen*

Die Gln. (15) bis (17) zusammen mit den linearisierten Bilanzgleichungen (2) bis (4)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (18)$$

$$\rho \frac{du_k}{dt} + \frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p + \frac{1}{3} p_{li} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (20)$$

und zwei thermodynamischen Zustandsfunktionen für e und p

$$e = e(T, \rho), \quad \frac{de}{dt} = e_T \frac{dT}{dt} + e_\rho \frac{d\rho}{dt}, \quad (21)$$

$$p = p(T, \rho), \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = p_T \frac{\partial T}{\partial x_i} + p_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (22)$$

bilden ein System von 16 unabhängigen Gleichungen für die 16 Unbekannten ρ , u_i , $\bar{p}_{ik}$, p , p_{11} , e , q_k , T .

Erweiterte Wärmeleitungsgleichung

Beschränkt man sich auf die Betrachtung eindimensionaler Vorgänge [d.h. alle Größen hängen nur von x ab und es ist $\vec{u}=(u, 0, 0)$ und $\vec{q}=(q, 0, 0)$] und betrachtet man u als von 1. Ordnung klein (d.h. in der betrachteten Näherung können die totalen Zeitableitungen durch partielle Ableitungen ersetzt werden), so erhält man aus (15) bis (22) die folgende verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
 ABC \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - \left[p_\rho + \frac{p_T}{e_T} \left(\frac{p}{\rho^2} - e_\rho \right) \right] ABC \frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2} - \\
 - [\omega AB + \mu AC + \nu BC] \frac{\partial^4 T}{\partial t^2 \partial x^2} + \nu p_\rho BC \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \\
 - e_T \rho^2 T^3 \nu [9L^2 \omega B + K^2 \mu C] \frac{\partial^5 T}{\partial t^3 \partial x^2} + \\
 + \nu [\mu(1 - K p T)(1 - K p_T T^2) C + \\
 + \omega(1 - 3L p T)(1 - 3L p_T T^2) B + \\
 + \rho^2 T^3 (p_\rho e_T - e_\rho p_T) (9L^2 \omega B + K^2 \mu C) + \\
 + \rho^2 e_\rho T (3L \omega B + K \mu C)] \frac{\partial^5 T}{\partial t \partial x^4} - \\
 - \mu \nu \omega (3L - K)^2 \rho^2 e_T T^3 \frac{\partial^6 T}{\partial t^2 \partial x^4} = 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Hierin sind die folgenden Bezeichnungen eingeführt worden

$$\begin{aligned}
 A = \left(1 + \kappa \alpha \rho T \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad B = \left(1 + 2\eta \beta \rho \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad C = \left(1 + 9 \zeta \Delta \rho \frac{\partial}{\partial t} \right); \\
 \nu = \frac{\kappa}{\rho e_T}; \quad \mu = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho}; \quad \omega = \frac{\zeta}{\rho}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Im Rahmen der phänomenologischen Theorie sind die Größen κ , η , ζ , α , β , Δ , K und L , von denen die Koeffizienten in Gl. (23) abhängen, nur durch (10) und (15) bis (17) eingeschränkt. Diese Einschränkung genügt nicht, um sicherzustellen, daß eine Temperaturstörung sich nach Gl. (23) mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreitet. Die Forderungen, die an κ , η , ζ , α , β , Δ , K und L gestellt werden müssen, um eine endliche Geschwindigkeit zu gewährleisten, sind im allgemeinsten Fall sehr kompliziert (s. dazu Anhang I, wo diese Forderungen in impliziter Form

angegeben werden). Im folgenden wird daher nur noch ein einatomiges ideales Gas betrachtet; für ein solches können die Größen κ , η , α , β und K (ζ , A und L treten in diesem Fall nicht auf) aus der kinetischen Gastheorie unter Zugrundelegung eines speziellen Atommodells explizit angegeben werden.

Erweiterte Wärmeleitungsgleichung für einatomige ideale Gase

Für einatomige ideale Gase gilt

$$\zeta = 0; \quad p_\rho = \Re T; \quad p_T = \frac{p}{T}; \quad e_\rho = 0$$

[$\Re$ charakteristische Gaskonstante].

Dann reduziert sich (23) auf

$$\begin{aligned} C_2 \frac{\partial^5 T}{\partial t^5} - B_2 \frac{\partial^5 T}{\partial t^3 \partial x^2} + A_2 \frac{\partial^5 T}{\partial t \partial x^4} + \\ + C_1 \frac{\partial^4 T}{\partial t^4} - B_1 \frac{\partial^4 T}{\partial t^2 \partial x^2} + A_1 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + C_0 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - B_0 \frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

mit

$$C_2 = 2\kappa\eta\alpha\beta\rho^2 T, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} B_2 = 2 \left(1 + \frac{\Re}{e_T} \right) \frac{p}{\rho} \kappa\eta\alpha\beta\rho^2 T + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \kappa\alpha\rho T + \\ + 2 \frac{\kappa}{\rho e_T} \eta\beta\rho - \frac{\kappa}{\rho e_T} \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{K p T}{\Re T} \frac{K p T}{\Re/e_T}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$A_2 = 2 \frac{\kappa}{\rho e_T} \frac{p}{\rho} \eta\beta\rho + \frac{\kappa}{\rho e_T} \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} (1 - K p T)^2 + \frac{\kappa}{\rho e_T} \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{(K p T)^2}{\Re/e_T}, \quad (28)$$

$$C_1 = \kappa\alpha\rho T + 2\eta\beta\rho, \quad (29)$$

$$B_1 = \left(1 + \frac{\Re}{e_T} \right) \frac{p}{\rho} (\kappa\alpha\rho T + 2\eta\beta\rho) + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho e_T}, \quad (30)$$

$$A_1 = \frac{\kappa}{\rho e_T} \frac{p}{\rho}, \quad (31)$$

$$C_0 = 1, \quad (32)$$

$$B_0 = \left(1 + \frac{\Re}{e_T} \right) \frac{p}{\rho}. \quad (33)$$

In Teil II dieser Arbeit werden die Werte von α , β und K für ein einatomiges ideales Gas aus Maxwell-Teilchen berechnet. Darunter ver-

steht man Teilchen, die gemäß dem Maxwellschen „ r^{-4} -Potential“ wechselwirken.

Insbesondere folgt aus der kinetischen Gastheorie [s. (58) in Verbindung mit (26) bis (28)]

$$C_2 = \frac{2}{3} \tau_{11}^2; \quad B_2 = \frac{52}{15} \Re T \tau_{11}^2; \quad A_1 = 2(\Re T)^2 \tau_{11}^2. \quad (34)$$

Damit zeigt sich, daß $4C_2A_2 < B_2^2$; nach (A.8) ist also die größere der beiden Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Temperaturstörungen

$$v_T = \left(2 \frac{A_2}{B_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - 4 \frac{C_2 A_2}{B_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

und mit (34) folgt

$$v_T = 2,14 \sqrt{\Re T}, \quad (36)$$

d.h. v_T liegt in der Größenordnung der mittleren Teilchengeschwindigkeit.

2. Zur Bestätigung der erweiterten phänomenologischen Gleichungen durch die kinetische Gastheorie für einatomige ideale Gase aus Maxwell-Teilchen

Beschreibung des Zustandes

Der Zustand eines idealen einatomigen Gases ist beschrieben durch die Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ der den Teilchen zugeordneten Phasenpunkte im sechsdimensionalen Phasenraum. $\vec{x}$ ist der Ort und $\vec{\xi}$ die Geschwindigkeit der Teilchen bezüglich des Beobachtersystems. $f(\vec{x}, \vec{\xi}, t) dx d\xi$ ist die Masse der Teilchen im Phasenraumelement $dx d\xi$.

$f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ genügt der Boltzmanngleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \iint (f' f'_1 - f f_1) \sigma g d\vec{e}' d\xi^1. \quad (37)$$

Folgende Größen werden definiert

$$\rho = \int f d\xi \quad \text{Dichte,} \quad (38)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} \int \vec{\xi} f d\xi \quad \text{mittlere Geschwindigkeit der Gasatome} \quad (39)$$

bezüglich Beobachtersystem,

$$\vec{c} = \vec{\xi} - \vec{u} \quad \text{Teilchengeschwindigkeit bezüglich} \quad (40)$$

lokalem Ruhssystem R ,

$$P_{ij} = \int c_i c_j f d\xi \quad \text{Impulsflußtensor bezüglich } R, \quad (41)$$

$$q_i = \frac{1}{2} \int c_i c^2 f d\xi \quad \text{Energiefluß bezüglich } R, \quad (42)$$

$$p = \frac{1}{3} P_{ii} \quad \text{Druck,} \quad (43)$$

$$p_{ij} = P_{ij} - p \delta_{ij} \quad \text{spurfreier Drucktensor,} \quad (44)$$

$$e = \frac{3}{2} \frac{p}{\rho} \quad \text{spezifische innere Energie,} \quad (45)$$

$$T = \frac{2}{3\Re} e \quad \text{Temperatur,} \quad (46)$$

$$s = \frac{1}{\rho} \int [-\Re \ln f] f d\xi \quad \text{spezifische Entropie.} \quad (47)$$

Linearisierte Boltzmann-Gleichung und ihre Lösung für Maxwell-Teilchen

Der Zustand des Gases weiche nur wenig vom Gleichgewichtszustand (0) ab; in diesem ist die Verteilungsfunktion

$$f^{(0)} = \rho^{(0)} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \xi^2}, \quad \beta = \frac{1}{2\Re T^{(0)}}. \quad (48)$$

(Hierbei ist $u^{(0)} = 0$ gesetzt, d.h. als Beobachtersystem ist das System gewählt, in dem das Medium im Gleichgewicht ruht.) Setzt man $f = f^{(0)}(1 + \Phi)$ in die Boltzmann-Gleichung (37) ein und vernachlässigt man Größen in Φ^2 , so erhält man die linearisierte Boltzmann-Gleichung

$$f^{(0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{m} \iint f^{(0)} f_1^{(0)} (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1) \sigma g d\vec{e}' d\xi^1. \quad (49)$$

Die Lösung dieser Integrodifferentialgleichung wird von WALDMANN⁵ in Form einer Entwicklung nach den aus $\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2} \dots \xi_{\mu_l}$ gebildeten symmetrisch irreduziblen Tensoren angegeben. Für ein Gas aus Maxwell-Teilchen ergibt sich

$$\Phi(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}(\vec{x}, t) \sum_{p=0}^r A_{l r p} V \sqrt{\beta}^{2p+l} \xi^{2p} \xi_{\mu_1 \dots \mu_l} \right). \quad (50)$$

Dabei sind: $A_{l r p}$ -Koeffizienten

$$a^{(0)} = \frac{\rho}{\rho^{(0)}} - 1; \quad a_{\mu}^{(0)} = \sqrt{6\beta} u_{\mu}; \quad a^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{T}{T^{(0)}} \right); \quad (51)$$

$$a_{\mu}^{(1)} = -\sqrt{6\beta} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{p^{(0)}} q_{\mu}; \quad a_{\mu\nu}^{(0)} = \sqrt{\frac{15}{4}} \frac{1}{p^{(0)}} p_{\mu\nu} \quad (52)$$

⁵ WALDMANN, L.: Handbuch der Physik, Bd. XII, S. 367ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

und die $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ $[(l, r) \neq (0, 0); (0, 1); (1, 0)]$ genügen dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \left(1 + \tau_{lr} \frac{\partial}{\partial t}\right) a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)} \\ &= -\lambda_{lr} \sqrt{l + \frac{1}{2} + r} \left\langle \frac{\partial a_{\mu_1 \dots \mu_{l-1}}^{(r)}}{\partial x_{\mu_l}} \right\rangle + \lambda_{lr} \sqrt{r + 1} \left\langle \frac{\partial a_{\mu_1 \dots \mu_{l-1}}^{(r-1)}}{\partial x_{\mu_l}} \right\rangle - \\ & \quad - \frac{l+1}{2l+3} \lambda_{lr} \sqrt{l + \frac{3}{2} + r} \frac{\partial a_{\mu_1 \dots \mu_{l+1}}^{(r)}}{\partial x_{\mu_{l+1}}} + \frac{l+1}{2l+3} \lambda_{lr} \sqrt{r} \frac{\partial a_{\mu_1 \dots \mu_{l+1}}^{(r-1)}}{\partial x_{\mu_{l+1}}} \\ & \quad (a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(-1)} = 0). \end{aligned} \quad (53)$$

Die τ_{lr} sind von der Größenordnung der Stoßzeit der Gasatome und die

$$\lambda_{lr} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tau_{lr}$$

von der Größenordnung der freien Weglänge.

Eine Näherung innerhalb der linearisierten kinetischen Gastheorie für Maxwell-Teilchen

Es sei nunmehr angenommen, daß die Änderung aller $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ über eine freie Weglänge, bzw. während einer Stoßzeit klein ist gegen die Breite Δa des Wertebereiches, in dem die $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ variieren können. Von $(n+m)$ -ter Ordnung klein gegen Δa seien in der betrachteten Näherung die Größen (τ und λ sollen von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge bzw. der Stoßzeit der Teilchen sein)

$$\lambda^n \tau^m \frac{\partial^{n+m} A}{\partial x^n \partial t^m}, \quad (54)$$

wobei $A(x, t)$ eine der Größen $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a_\mu^{(0)}$ sein soll. (Der Einfachheit halber wird nur eine Ortsvariable angeschrieben.)

Eine „relative Ableitung“ (d.h. $\lambda \frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\tau \frac{\partial}{\partial t}$) erhöht also die Ordnung um eine Einheit; diese Aussage soll für alle $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ gelten.

Die Bedeutung und die Grenzen dieser Näherung werden in Anhang II näher untersucht.

Die $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ $[(l, r) \neq (0, 0); (0, 1); (1, 0)]$ sind in der betrachteten Näherung mindestens von 1. Ordnung klein, denn nach (53) ergeben sie sich als Summe relativer Ableitungen von $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$. Die tatsächliche Ordnung der $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ $[(l, r) \neq (0, 0); (0, 1); (1, 0)]$ erhält man in folgender Weise:

a) Von 1. Ordnung klein sind diejenigen unter den $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ auf der linken Seite von (53), die relative Ableitungen der Größen 0. Ordnung enthalten [d.h. nach (54) relative Ableitungen von $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a_{\mu}^{(0)}$].

b) Von 2. Ordnung klein sind alle diejenigen $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ $[(l, r) \neq (0, 0); (0, 1); (1, 0)]$, die keine relativen Ableitungen von Größen 0. Ordnung, aber relative Ableitungen von Größen 1. Ordnung enthalten.

usw.

Führt man diese Untersuchung am Gleichungssystem (53) durch, so ergibt sich das in der Tabelle dargestellte Ergebnis

Tabelle der Größen 0. Ordnung, 1. Ordnung, 2. Ordnung

$r \backslash l$	0	1	2	3
0	$a^{(0)}$	$a_{\mu}^{(0)}$	$\underline{a_{\mu\nu}^{(0)}}$	$\underline{\underline{a_{\mu\nu\lambda}^{(0)}}}$
1	$a^{(1)}$	$\underline{a_{\mu}^{(1)}}$	$\underline{\underline{a_{\mu\nu}^{(1)}}}$	
2	$\underline{\underline{a^{(2)}}}$			

(55)

Alle hierin nicht angeschriebenen Größen $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ sind höchstens von 3. Ordnung.

Bestätigung der erweiterten phänomenologischen Ansätze

Streicht man in den Gleichungen für $a_{\mu}^{(1)}$ und $a_{\mu\nu}^{(0)}$ aus (53) alle Terme, die in dem oben beschriebenen Sinne von höherer als 2. Ordnung klein sind, so erhält man

$$\begin{aligned}
 a_{\mu}^{(1)} &= -\tau_{11} \frac{\partial a_{\mu}^{(1)}}{\partial t} - \lambda_{11} \left[\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{2}{5} \lambda_{11} \frac{\partial a_{\mu\nu}^{(0)}}{\partial x_{\nu}} \right], \\
 a_{\mu\nu}^{(0)} &= -\tau_{20} \frac{\partial a_{\mu\nu}^{(0)}}{\partial t} - \lambda_{20} \left[\sqrt{\frac{5}{2}} \left\langle \frac{\partial a_{\mu}^{(0)}}{\partial x_{\nu}} \right\rangle + \lambda_{20} \left\langle \frac{\partial a_{\mu}^{(1)}}{\partial x_{\nu}} \right\rangle \right].
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Wegen (52) folgt daraus (es gilt nach WALDMANN $\tau_{20} = \frac{2}{3} \tau_{11}$)

$$\begin{aligned}
 q_{\mu} &= -\frac{5}{2} \Re p^{(0)} \tau_{11} \left(\frac{\partial T}{\partial x_{\mu}} + \frac{2}{5 \Re p^{(0)}} \frac{\partial q_{\mu}}{\partial t} + \frac{2}{5} \frac{T^{(0)}}{p^{(0)}} \frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \right), \\
 p_{\mu\nu} &= -2 \left(\frac{2}{3} p^{(0)} \tau_{11} \right) \left(\left\langle \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right\rangle + \frac{1}{2 p^{(0)}} \frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial t} + \frac{2}{5 p^{(0)}} \left\langle \frac{\partial q_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right\rangle \right).
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

Diese beiden Gleichungen entsprechen genau den phänomenologischen Ansätzen (15) und (16), wenn man diese auf den Fall einatomiger idealer Gase spezialisiert ($p_{II} = 0$).

Die in der phänomenologischen Theorie eingeführten Größen α , β , K , κ und η haben demgemäß die Werte

$$\alpha = \frac{2}{5} \frac{1}{p^{(0)2}}; \quad \beta = \frac{1}{2 p^{(0)} \rho^{(0)}}; \quad K = \frac{2}{5} \frac{1}{p^{(0)} T^{(0)}}; \\ \kappa = \frac{5}{2} \Re p^{(0)} \tau_{11}; \quad \eta = \frac{2}{3} p^{(0)} \tau_{11}. \quad (58)$$

Mittels dieser Werte wurden in (34) die Koeffizienten C_2 , B_2 und A_2 bestimmt.

Hätte man in (53) alle Terme bis auf die von 1. Ordnung in dem oben beschriebenen Sinne weggelassen, so hätte man erhalten

$$q_\mu = -\frac{5}{2} \Re p^{(0)} \tau_{11} \frac{\partial T}{\partial x_\mu}, \\ p_{\mu\nu} = -2 \left(\frac{2}{3} p^{(0)} \tau_{11} \right) \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right\rangle, \quad (59)$$

also gerade die phänomenologischen Gleichungen der üblichen T.I.P.

Man kommt also zu dem Ergebnis, daß die übliche T.I.P. nur solche Größen berücksichtigt, die im oben beschriebenen Sinne von geringerer als 2. Ordnung klein sind, während die hier vorgeschlagene erweiterte T.I.P. erst die Größen vernachlässigt, die von 3. oder höherer Ordnung klein sind.

Die Gln. (57) können angewendet werden auf die Berechnung von Absorption und Dispersion ebener Schallwellen. Diesbezüglich sei auf die Dissertation verwiesen.

Anhang I

Berücksichtigt man (24), so nimmt (23) die folgende Form an [ϑ ist die (kleine) Abweichung der Temperatur vom Gleichgewichtswert].

$$\sum_{i=0}^3 C_i \frac{\partial^{i+3} \vartheta}{\partial t^{i+3}} - \sum_{i=0}^3 B_i \frac{\partial^{i+3} \vartheta}{\partial t^{i+1} \partial x^2} + A_i \frac{\partial^{i+3} \vartheta}{\partial t^{i-1} \partial x^4} = 0 \quad (A.1)$$

mit konstanten Koeffizienten C_i , B_i , A_i .

Betrachtet wird ein Medium im Halbraum $x \geq 0$. Als Anfangsbedingung werde gewählt

$$\left. \frac{\partial^k \vartheta(x, t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = 0 \quad (k=0-5) \quad \text{für alle } x \geq 0. \quad (A.2)$$

Sei $u(x, s)$ die Laplacetransformierte von $\vartheta(x, t)$. Die Lösung von (A.1) im Bildraum der Laplacetransformation ist

$$u(x, s) = \sum_{j=1}^2 \gamma_j(s) e^{-s x f_j(s)}.$$

Die $f_j(s)$ sind durch $\rho_j = s \cdot f_j(s)$ bestimmt, wobei die ρ_j die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^3 A_i s^{i-1}\right) \rho^4 - \left(\sum_{i=0}^3 B_i s^{i+1}\right) \rho^2 + \left(\sum_{i=0}^3 C_i s^{i+3}\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

mit positivem Realteil sind.

Die Funktionen $\gamma_j(s)$ hängen von den Randbedingungen ab. Diese brauchen hier nicht spezifiziert zu werden; sie sollen nur so beschaffen sein, daß sie den Anfangszustand stören.

Im Originalraum ist die Lösung von (A.1) gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(s) e^{s(t-x f_j)} ds = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vartheta(x, t) & t \geq 0, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

wo δ größer ist als der Realteil sämtlicher singulären Punkte der Bildfunktion.

Bei der Bestimmung von (A.4) wurde eine Voraussetzung bezüglich der Werte von C_i, B_i, A_i gemacht. Soll nämlich (A.4) die Lösung von (A.1) sein, so muß $\text{Re}\{\rho_j(s)\}$ [$j=1, 2$] für alle s auf dem Integrationsweg in (A.4) positiv sein. Das ist eine Forderung an die Werte der Koeffizienten C_i, B_i, A_i .

Es gilt $\vartheta(x, t) = 0$ für alle Werte t , für welche [mit $s = R e^{i\varphi}$]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \{\text{Re}[e^{i\varphi}(t - x f_j(R e^{i\varphi}))]\} < 0 \quad (j=1, 2) \quad \text{für alle} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.5})$$

denn dann verschwindet das Integral über Weg II für $R \rightarrow \infty$ und das Integral in (A.4) ist gleich 0 für alle t , für die (A.5) gilt.

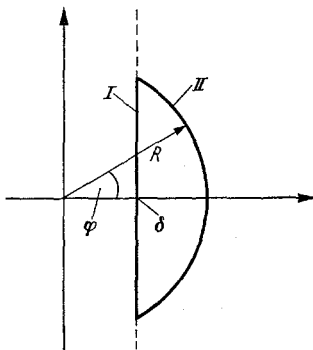


Fig. 1. Integrationsweg zur Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

(A.5) läßt sich wie folgt umschreiben

$$t < x \{ \text{Re}[\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi})] - \text{tg } \varphi \text{Im}[\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi})] \} \quad (\text{A.6})$$

für alle $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Als Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer bei $x=0$ angebrachten Temperaturstörung ergeben sich dann die Werte

$$v_T^j = \frac{1}{\operatorname{Re} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi_m}) \right] - \operatorname{tg} \varphi_m \operatorname{Im} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi_m}) \right]}, \quad (\text{A.7})$$

wobei φ_m derjenige Wert von φ zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ ist, für den die rechte Seite von (A.6) minimal wird.

Die Geschwindigkeiten (A.7) sind endlich, wenn gilt

$$\operatorname{Re} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi_m}) \right] - \operatorname{tg} \varphi_m \operatorname{Im} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi_m}) \right] > 0.$$

Postuliert man endliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten, so wird durch diese Ungleichung in impliziter Form eine Einschränkung für die Größen κ , η , ζ , α , β , A , K und L gegeben, von denen die Koeffizienten C_i , B_i , A_i abhängen. Nach (A.3) ist

$$f_{1,2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^3 B_i s^{i-1}}{\sum_{i=1}^3 A_i s^{i-1}}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=0}^3 B_i s^{i-1}}{\sum_{i=1}^3 A_i s^{i-1}} \right)^2 - 4 \frac{\sum_{i=0}^3 C_i s^{i-1}}{\sum_{i=1}^3 A_i s^{i-1}}}.$$

Hat man $4C_3 A_3 < B_3^2$, so ist $\operatorname{Im} [\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi_m})] = 0$ und es folgt

$$v_T^j = \left(2 \frac{A_3}{B_3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 \pm \left(1 - 4 \frac{C_3 A_3}{B_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Beide Geschwindigkeiten sind endlich, wenn C_3 , B_3 und A_3 größer als 0 sind.

Ist $4C_3 A_3 > B_3^2$, so tritt eine Komplikation ein, dann muß tatsächlich φ_m bestimmt werden.

Im Falle des einatomigen idealen Gases sind die Koeffizienten C_3 , B_3 und A_3 gleich 0.

Nun gilt: Ist $4C_2 A_2 < B_2^2$, so ist $\operatorname{Im} [\lim_{R \rightarrow \infty} f_j(R e^{i\varphi_m})] = 0$ und man erhält

$$v_T = \left(2 \frac{A_2}{B_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 \pm \left(1 - 4 \frac{C_2 A_2}{B_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.8})$$

Ist $4C_2 A_2 > B_2^2$, so muß wieder φ_m bestimmt werden.

Anhang II

Die Aussage, die Größe $\lambda^n \tau^m \frac{\partial^{n+m} A}{\partial x^n \partial t^m}$ sei von $(n+m)$ -ter Ordnung klein gegen Δa bedeutet, daß der Absolutbetrag dieser Größen kleiner oder höchstens gleich $\zeta^{n+m} \Delta a$ ist, mit $0 < \zeta \ll 1$.

Nun gilt

$$\left| \lambda^n \tau^m \frac{\partial^{n+m} A}{\partial x^n \partial t^m} \right| \leq \Delta a \overline{|\lambda k|^n |\tau \omega|^m} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega, k)| d\omega dk, \quad (\text{A.9})$$

wo $\varphi(\omega, k)$ die Fouriersche Bildfunktion von $A(x, t)$ ist und $\overline{|k^n| |\omega^m|}$ der Mittelwert von $|k^n| |\omega^m|$ bezüglich $|\varphi(\omega, k)|$.

Es muß untersucht werden, ob der Ausdruck rechts in (A.9) im oben beschriebenen Sinne von $(n+m)$ -ter Ordnung klein ist.

Das ist z.B. der Fall, wenn $\varphi(\omega, k)$ eine beschränkte Funktion ist, die nur in einem endlichen Intervall

$$-\frac{1}{L_1} \leq k \leq \frac{1}{L_2}; \quad -\frac{1}{T_1} \leq \omega \leq \frac{1}{T_2} \quad (\text{es sei } L_1 \leq L_2, T_1 \leq T_2)$$

von 0 verschieden ist. L_1 ist die kleinste Wellenlänge, T_1 die kleinste Schwingungszeit der Partialwellen von $A(x, t)$. Dann gilt [M_φ Maximalwert von $|\varphi(\omega, k)|$]

$$\left| \lambda^n \tau^m \frac{\partial^{n+m} A}{\partial x^n \partial t^m} \right| \leq \frac{\Delta a M_\varphi}{L_1 T_1} \left(\frac{\lambda}{L_1} \right)^n \left(\frac{\tau}{T_1} \right)^m.$$

Die Größe $\lambda^n \tau^m \frac{\partial^{n+m} A}{\partial x^n \partial t^m}$ ist also von $(n+m)$ -ter Ordnung klein gegen Δa , wenn gilt

$$\frac{\text{freie Weglänge}}{\text{kleinste Wellenlänge}} = \frac{\text{Stoßzeit}}{\text{kleinste Schwingungszeit}} \ll 1.$$

Sind in der Bildfunktion $\varphi(\omega, k)$ von $A(x, t)$ [$A(x, t)$ ist eine der Funktionen $a^{(0)}$, $a^{(1)}$ oder $a_\mu^{(0)}$] große Frequenzen und Wellenzahlen nur schwach vertreten, so läßt sich in der beschriebenen Weise wenigstens noch eine befriedigende Abschätzung der $a_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(r)}$ für kleine (l, r) -Paare angeben.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für ständige Beratung hat der Verfasser Herrn Professor Dr. J. MEIXNER zu danken.