

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Würzburg

Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperatur

Von
H. OTT*

Mit 1 Figur im Text

(Eingegangen am 11. Januar 1963)

In die übliche Herleitung der Lorentz-Transformation von Wärme und Temperatur haben sich zwei grundsätzliche Fehler eingeschlichen, nämlich

1. die Verwendung einer unvollkommenen Bewegungsgleichung für Körper mit veränderlicher Ruhemasse,
2. die irrtümliche Ansicht, die Leistung ($\mathfrak{L}\mathfrak{v}$) der an einem bewegten Leiter angreifenden Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}$ trage nur zur Erhöhung der mechanischen Energie des Leiters und nichts zur Stromwärme bei.

Nach Richtigstellung ergeben sich für eine Wärmemenge dQ und für die Temperatur die Transformationen

$$dQ = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T = \frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(dQ^0 , T^0 beziehen sich auf das Eigensystem), wenn man den 1. und 2. Hauptsatz in der üblichen Form zugrunde legt.

Indessen lassen sich relativistische Wärme und Temperatur aber auch durch eine Abänderung der beiden Hauptsätze definieren, nämlich mit zwei unbestimmten Geschwindigkeitsfunktionen $g(\beta)$ und $f(\beta)$ durch

$$dE + dA = dQ \cdot g(\beta) \quad \text{und} \quad T dS = dQ \cdot f(\beta).$$

Die so entstehende Vieldeutigkeit der Transformationen sucht M. v. LAUE zu vermeiden, indem er sich auf jene Formen der beiden Hauptsätze beschränkt, welche die Vorgänge am einfachsten beschreiben. Über diesen subjektiven Gesichtspunkt hinaus läßt sich aber die Eindeutigkeit zugunsten der oben angeführten Transformationen durch zwei objektive Forderungen erzwingen:

1. Als relativistische Wärme dQ soll die Wärme gelten, die man adiabatisch und ohne Arbeitsleistung vom bewegten Körper in das Ruhesystem des Beobachters überführen und dort nach den üblichen Methoden messen kann.
2. Die relativistische Temperaturskala soll so gewählt werden, daß auch zwischen zwei verschieden bewegten Körpern die Wärme „von selbst“ nie von tieferer zu höherer Temperatur aufsteigt, sondern stets vom relativistisch heißeren Körper zum kälteren absinkt (Permanenz der klassischen Axiome).

* Verstorben am 26. November 1962.

§1. Derzeitiger Stand der Theorie

Als Lorentz-Transformation der bewegten Wärme findet man wohl meist die Formel

$$dQ = dQ^0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1)$$

angegeben¹, worin dQ^0 die (positive oder negative) Wärmemenge bedeutet, die ein gleichförmig bewegter Körper in seinem *Eigensystem* Σ^0 aufnimmt, während dQ diese Wärmeaufnahme in einem Inertialsystem Σ beschreibt, gegen das sich der Körper mit der Translationsgeschwindigkeit $\beta = v/c$ bewegt. Um verschwommene Verbaldefinitionen der „bewegten“ Wärme von vornherein auszuschließen, seien diese Wärmemengen vorerst definiert durch den auf Σ^0 bzw. Σ bezogenen 1. Hauptsatz

$$dQ = dE + dA, \quad (2)$$

wo dE den Zuwachs der Gesamtenergie des Körpers und dA die von ihm abgegebene Arbeit darstellen.

Da die Entropie S eine Lorentz-Invariante ist (sie läßt sich ja herleiten aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, die durch eine Translationsbewegung des Trägers nicht modifiziert werden²), folgt, wenn man die thermodynamische Definition des Entropiedifferentials $dS = dQ/T$ auch für bewegte Körper beibehält, daß die relativistische Temperatur T sich transformiert wie die Wärme:

$$T = T^0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3)$$

Etwas merkwürdig erscheint allerdings die Formel (1) unter dem Gesichtspunkt, daß der Wärmeinhalt eines ruhenden Körpers doch eine Energie mit dem resultierenden Impuls Null darstellt, und eine solche transformiert sich bekanntlich wie $E = E^0 / \sqrt{1 - \beta^2}$. Immerhin ist dieser Einwand nicht ganz stichhaltig, da nach (2) ja nicht dE , sondern $dE + dA$ zu transformieren ist. Überhaupt schienen Zweifel an der Richtigkeit der Transformation (1) um so weniger am Platze zu sein, als diese Formel ja auf zwei ganz verschiedenen Wegen unabhängig voneinander hergeleitet werden konnte: sie ergab sich einerseits aus mechanisch-thermodynamischen Überlegungen und man glaubte sie andererseits in der Elektrodynamik an der Jouleschen Wärme eines bewegten Leiters bestätigt zu finden. Indessen halten beide Herleitungen, wie im folgenden gezeigt werden soll, einer strengen Kritik nicht stand, wenn man die Wärme auf Grund der Form (2) des 1. Hauptsatzes definiert. In beide Herleitungen haben sich grundsätzliche Fehler eingeschlichen.

¹ Vgl. etwa M. v. LAUE, Die Relativitätstheorie, Bd. I, S. 160. Braunschweig 1952.

² LAUE, M.v.: l. c. S. 35.

§ 2. Kritik der mechanisch-thermodynamischen Beweise von (1)

Wir fassen einen dieser üblichen Beweise ins Auge³: Mit einem Wärmeübertrager, etwa einem Zweiphasensystem Flüssigkeit—Satteldampf, der aus einem relativ zu ihm ruhenden Wärmebehälter Wärmemengen isotherm aufnehmen kann, vollführen wir den in Fig. 1 symbolisch dargestellten Kreisprozeß:

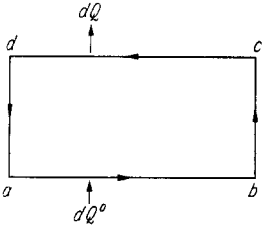


Fig. 1. Beschreibung siehe Text

1. Der Weg $a \rightarrow b$ bedeute, daß der ruhende Übertrager aus einem gleichfalls ruhenden Wärmebehälter von der Eigentemperatur T^0 die Wärmemenge dQ^0 isotherm aufnehme. Wenn dabei die vom Übertrager geleistete Volumenänderungsarbeit nicht abgegeben, sondern im Übertragersystem gespeichert wird, wächst seine Ruheenergie bzw. seine Ruhemasse m^0 um

$$dm^0 = \frac{dQ^0}{c^2}. \quad (4)$$

2. Weg $b \rightarrow c$. Der Übertrager werde nun adiabatisch auf die Geschwindigkeit β beschleunigt. Dabei bleiben Eigentemperatur T^0 und Ruhemasse $m^0 + dm^0$ des Übertragers konstant; es ändert sich lediglich seine Bewegungsenergie, deren Zuwachs wir durch eine Arbeit dA_1 decken müssen, die wir, da sie dem Übertrager zuzuführen ist, entsprechend dem Gebrauch im 1. Hauptsatz (2) mit negativem Vorzeichen in Rechnung stellen

$$dA_1 = -(m^0 + |dm^0|) c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

3. Weg $c \rightarrow d$. Der Übertrager gebe an einen mit der Geschwindigkeit β mitbewegten Wärmebehälter die im Eigensystem gemessene Wärmemenge $-dQ^0$ wieder ab, die wir aber vom Standpunkt des nicht mitbewegten Beobachters mit $-dQ$ bezeichnen müssen. Mit dieser Wärmeabgabe ist auch der vorige Zuwachs dm^0 der Eigenmasse des Übertragers wieder rückgängig gemacht.

4. Weg $d \rightarrow a$. Der Übertrager werde zur Ruhe abgebremst, wobei er die Arbeit

$$dA_2 = m^0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

abgibt und wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt.

Für diesen Kreisprozeß ist nun die Summe der dem Übertrager zugeführten Wärmen $dQ^0 - dQ$ gleich der Summe der von ihm abgeführten

³ LAUE, M. V.: I. c. S. 169.

Arbeiten, alles beurteilt vom Standpunkt des nicht mitbewegten Beobachters. Bevor wir diese Bilanz aufstellen, müssen wir unser Augenmerk aber noch einmal auf den 3. Schritt $c \rightarrow d$ des Kreisprozesses richten. In den üblichen Herleitungen wird nämlich behauptet, die mit der Wärmeabgabe verbundene Abnahme $-|dm^0|$ der Ruhemasse des bewegten Übertragers erfordere, um dessen Geschwindigkeit v konstant zu halten, vermöge der Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathfrak{G}} = \frac{d}{dt} \frac{m^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathfrak{R} \quad (5)$$

im System des ruhenden Beobachters eine Kraft $\star$ von der Größe

$$\mathfrak{R} = - \left| \frac{dm^0}{dt} \right| \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5a)$$

welche auf dem Schritt $c \rightarrow d$ vom Übertrager die mechanische Arbeit

$$dA_3 = - \mathfrak{R} v dt = \frac{|dm^0| v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

nach außen abführe.

Eine derartige Kraft, welche den Körper nicht beschleunigt, sondern bei Änderung seiner Ruhemasse nach der Bewegungsgleichung lediglich zur Aufrechterhaltung der Translationsgeschwindigkeit nötig erscheint, soll im folgenden als „Führungskraft“ bezeichnet werden. Gibt man die Existenz der Führungskraft (5a) zu, so liefert der 1. Hauptsatz für den Kreisprozeß des Übertragers vom Standpunkt des nicht mitbewegten Beobachters

$$dQ^0 - dQ = dA_1 + dA_2 + dA_3 = - \frac{|dm^0| c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + |dm^0| c^2 + \frac{|dm^0| v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6)$$

und mit Rücksicht auf (4):

$$dQ = |dm^0| c^2 \sqrt{1-\beta^2} = dQ^0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (1)$$

womit (1) bewiesen zu sein scheint $\star\star$.

Wir werden jedoch im folgenden zeigen, daß die Führungskraft (5a) auf dem Weg $c \rightarrow d$ keine Realität besitzt und samt ihrer Arbeit dA_3 zu streichen ist. Dann folgt aber aus (6):

$$dQ = \frac{|dm^0| c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7)$$

$\star$ Die jedoch im Eigensystem des Übertragers verschwindet!

$\star\star$ Auch der bewegte Wärmebehälter benötigt nach (5) eine Führungskraft

$$\mathfrak{R}' = \left| \frac{dm^0}{dt} \right| \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = - \mathfrak{R},$$

welche ihm die mechanische Wechselwirkungsenergie $dQ^0 \beta^2 / \sqrt{1-\beta^2}$ zuführt. Somit wird vom Übertrager auf den Behälter die Gesamtenergie

$$dQ^0 \sqrt{1-\beta^2} + \frac{dQ^0 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

übertragen.

Definitionsgemäß transformiert sich dann die Temperatur wie

$$T = \frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8)$$

Wenn wir im Vorhergehenden die Führungskraft (5 a) auf dem Weg $c \rightarrow d$ gestrichen haben, so soll damit nicht geleugnet werden, daß in besonderen Fällen tatsächlich Führungskräfte zur Aufrechterhaltung der Translationsgeschwindigkeit nötig sind; bestritten wird nur, daß sich diese aus Gl. (5) berechnen, denn dies führt zu merkwürdigen Konsequenzen, einschließlich der Verletzung des Energiesatzes. Schon der Umstand, daß diese Führungskräfte nach (5) auch dann auftreten müßten, wenn man die Ruhemasse eines bewegten Körpers *nur in Gedanken verändert*, sei es, daß man sich den Körper in mehrere Teilsysteme gleicher Geschwindigkeit zerlegt oder daß man sich mehrere Körper gleicher Geschwindigkeit zu einem Gesamtsystem zusammengefaßt denkt, zeigt bereits die Problematik dieser Kräfte. Bedenklicher aber ist es, daß die nach (5) berechneten Führungskräfte im Falle des Wärmeübergangs zu einer falschen Interpretation der Energieübertragung geführt haben. Um dies zu zeigen, betrachten wir einmal zwei ruhende, sich berührende Körper C_1 und C_2 , zwischen denen eine Massenpartikel μ^0 mit der Geschwindigkeit Null übergehe, etwa von C_2 zu C_1 . Da diese Masse keinen Impuls mit sich führt, bleibt der Körper C_1 in Ruhe und seine Ruhemasse bzw. Ruheenergie wächst um die Ruheenergie der aufgenommenen Partikel: $dE_1^0 = dm_1^0 c^2 = \mu^0 c^2$. Ein Beobachter, gegen den sich diese beiden Körper bewegen, würde vernünftigerweise schließen, daß dem Körper C_1 durch die übertretende Partikel die relativistische Masse bzw. Energie $\frac{\mu^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ konvektiv zugeführt werde. Nach Gl. (5) gestaltet sich diese Energiezufuhr aber folgendermaßen: Um die Geschwindigkeit v des Körpers C_1 aufrecht zu erhalten, wäre die Führungskraft $\mathfrak{R} = \frac{\dot{m}_1^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ notwendig, welche ihm die Arbeit

$$\mathfrak{R}v = \frac{\dot{m}_1^0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt} \frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \dot{m}_1^0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$$

zuführt. Da der erste Term rechts den Zuwachs der Gesamtenergie $E_1 = \frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ des Körpers darstellt, hat man mit $dm_1^0 = \mu^0$ den Energiesatz

$$dE_1 = (\mathfrak{R}v) dt + \mu^0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}.$$

In dieser Darstellung setzt sich der Energiezuwachs dE_1 also zusammen aus der Arbeit $(\mathfrak{R}v) dt$ der Führungskraft $\mathfrak{R}$ und aus einer durch die Masse μ^0 konvektiv zugeführten Energie $\mu^0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$ und letztere liefert, wenn wir unter μ^0 vorübergehend eine zugeführte Wärmemenge dQ^0 von

der Ruhemasse $\mu^0 = \frac{dQ^0}{c^2}$ verstehen, gerade die relativistische Wärme $dQ = dQ^0 \sqrt{1 - \beta^2}$ der Transformation (1). Aber die Deutung dieses Terms als konvektiv zugeführte Wärme ist sicher falsch. Man erkennt dies, wenn wir wieder zum Bild einer zugeführten Partikelmasse μ^0 zurückkehren und durch Entwicklung des obigen Energiesatzes nach Potenzen von β^2 zur klassischen Mechanik $\beta \ll 1$ übergehen. In dieser Näherung wird $E_1 = m_1^0 c^2 + \frac{1}{2} m_1^0 v^2 = m_1^0 c^2 + E_{\text{kin}}$ und es hebt sich auf beiden Seiten des Energiesatzes das Glied $d m_1^0 c^2 = \mu^0 c^2$ heraus, so daß verbleibt

$$dE_{\text{kin}} = (\mathfrak{R}v) dt - \frac{1}{2} \mu^0 v^2,$$

was natürlich auch direkt aus der klassischen Bewegungsgleichung gefunden werden kann. Der erste Term rechts ist wiederum die Arbeit der vermeintlichen Führungskraft, aber der zweite kann im Hinblick auf sein *Vorzeichen* unmöglich eine durch die Masse μ^0 *konvektiv zugeführte* Energie darstellen, sonst müßte diese Partikel ja mit *negativer* (!) kinetischer Energie zum Körper C_1 übertreten. Es ist eben der Zuwachs dE_{kin} im obigen Energiesatz durch die vermeintliche Arbeit $(\mathfrak{R}v) dt = d m_1^0 v^2 = \mu^0 v^2$ der Führungskraft $\mathfrak{R}$ überkompensiert und der obige Term $-\frac{\mu^0}{2} v^2$ hat hier keine physikalische, sondern nur die mathematische Bedeutung, daß er diese Überkompensation wieder richtig stellt, mitnichten aber kann er als konvektiv zugeführte Energie angesprochen werden*. Dieser Sachverhalt wird in der relativistischen Mechanik dadurch verschleiert, daß hier die Masse μ^0 noch die große Ruheenergie $\mu^0 c^2$ mit sich bringt, welche den Term $-\frac{\mu^0}{2} v^2$ zu einem positiven Beitrag ergänzt $(\mu^0 c^2 - \frac{\mu^0}{2} v^2 \approx \mu^0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2})$, was den Irrtum begünstigt hat, als handle es sich hierbei um eine konvektiv zugeführte Energie.

Im vorhergehenden Fall ist wenigstens der Energiesatz noch erfüllt. Man kann aber leicht ein Beispiel anführen, bei dem Gl. (5) sogar den Energiesatz verletzt: Eine ruhende Masse μ^0 werde durch unelastischen Stoß mit einem bewegten Körper von konstant gehaltener Geschwindigkeit v in die volle Bewegung mitgerissen. Die Eigenmasse des bewegten Körpers wächst dadurch um $d m^0 = \frac{\mu^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Gleichzeitig gebe der Körper aber eine Masse von dieser Größe an ein mitbewegtes System wieder ab, so daß sich seine Ruhemasse bei diesem Doppelprozeß der Absorption und Emission nicht ändert. Nach (5) schließt man dann, daß auch keine

* Nur wenn die Partikel μ^0 nicht von einem mitbewegten Körper stammt, sondern aus der Ruhe in die volle Bewegung v mitgerissen wird, hat der Term $-\frac{\mu^0}{2} v^2$ in der klassischen Mechanik eine physikalische Bedeutung, nämlich als Carnotscher Energieverlust des unelastischen Stoßes.

Führungskraft $\mathfrak{R}$ und keine Energiezufuhr $(\mathfrak{R}v) dt$ nötig sei, um den Körper auf der konstanten Geschwindigkeit v zu halten*. Dies widerspricht aber dem Energiesatz, denn der bewegte Körper gibt an seine Umgebung insgesamt die Energie $\frac{\mu^0 c^2}{1-\beta^2} - \mu^0 c^2 = \frac{\mu^0 v^2}{1-\beta^2}$ ab, deren Herkunft unerklärt bleibt.

Es ist aber nicht schwer, die im vorigen dargelegten Ungereimtheiten durch Erweiterung der Gl. (5) zu vermeiden. Wenn einem unter dem Einfluß einer beliebigen äußeren Kraft $\mathfrak{R}$ stehenden bewegten Körper von der Ruhemasse m^0 im Zeitelement dt die Energie δW *konvektiv* zugeführt wird (z.B. als Wärme), so lautet der Energiesatz

$$dE = d\left(\frac{m^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = (\mathfrak{R}v) dt + \delta W. \quad (9)$$

Diese Gleichung muß aber, wenn sie Lorentz-invariant sein soll, die Zeitkomponente einer Vierergleichung sein, die leicht zu finden ist. Wegen der Trägheit der Energie wird dem Körper mit δW im allgemeinen auch ein mechanischer Impuls $\delta \mathfrak{P}$ zugeführt, der sich mit $\frac{i}{c} \delta W$ zu einem Vierervektor, dem konvektiven Viererimpuls

$$\delta \mathbf{P} = \left\{ \delta \mathfrak{P}, \frac{i}{c} \delta W \right\}$$

zusammenfassen läßt. Bedeuten ferner

$$\mathbf{I} = \left\{ \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}$$

die Vierergeschwindigkeit des Körpers,

$$\mathbf{II} = \left\{ \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{i}{c} \frac{(\mathfrak{R}v)}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}$$

die von außen angreifende Minkowski-Kraft und

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2} dt$$

den Zuwachs der Eigenzeit des Körpers, so lautet die gesuchte Vierergleichung

$$\frac{d}{d\tau} (m^0 \mathbf{I}) = \mathbf{II} + \frac{\delta \mathbf{P}}{d\tau}. \quad (10)$$

* Betrachtet man die beiden Prozesse getrennt, so werden die Führungskräfte beim Absorptions- und Emissionsakt nach (5) entgegengesetzt gleich und heben sich weg. Bei richtiger Rechnung [s. Gl. (11)] wird jedoch nur beim Absorptionsakt eine Führungskraft notwendig, welche dem Körper die Arbeit $\frac{\mu^0 v^2}{1-\beta^2}$ zuführt, womit der Energiesatz gerettet wird.

Die Raumkomponente liefert die Bewegungsgleichung, welche an Stelle von (5) tritt:

$$\frac{d}{dt} \frac{m^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathfrak{R} + \frac{\delta \mathfrak{P}}{dt}, \quad (11)$$

d.h.: Der Impuls $\mathfrak{G} = \frac{m^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ des Körpers ändert sich nicht nur auf Grund der äußeren Kraft $\mathfrak{R}$, sondern auch vermöge des konvektiv zu- oder abgeführten Impulses $\delta \mathfrak{P}$ (Rakete!). Es sind dies doch alles recht wohlbekannte Dinge⁴, die man merkwürdigerweise bei der Transformation der Wärme ignoriert hat.

Aus (11) folgt nun sofort, daß auf dem Wege $c \rightarrow d$ des vorigen Kreisprozesses die Führungskraft $\mathfrak{R}$ verschwindet, denn mit der Wärme $|dQ^0| = |dm^0| c^2$ wird vom Übertrager auch ein Impuls $\delta \mathfrak{P} = -\frac{dQ^0}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ weggeführt, der sich in (11) gegen das auf der linken Seite sich ergebende Glied $\frac{dm^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{|dm^0| v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ weghebt, so daß verbleibt

$$m^0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathfrak{R}.$$

Daraus folgt aber, daß zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit v keine Führungskraft $\mathfrak{R}$ notwendig ist, was wir auf S. 73 bereits vorweggenommen haben.

Man darf nicht auf den Gedanken verfallen, den zugeführten Impuls $\delta \mathfrak{P}$ als eine Art Rückstoß mit der Kraft $\mathfrak{R}$ zu einer fiktiven Kraft $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + \frac{\delta \mathfrak{P}}{dt}$ zu verschmelzen; man würde dadurch das wichtige Bestimmungsstück $\delta \mathfrak{P}$ verlieren und käme formal auf die Gl. (5) mit all ihren untragbaren Konsequenzen zurück.

Zur Transformation der Wärme knüpfen wir an (9) an. Diese Gleichung hat aber noch nicht unbedingt die Form des 1. Hauptsatzes (2), denn die von einem Körper anderer Geschwindigkeit zugeführte Wärme δW erteilt unserem absorbierenden Körper von der Geschwindigkeit v möglicherweise vermöge des konvektiven Impulses einen (Rück-) Stoß $\mathfrak{F}$, dessen mechanische Arbeit $\mathfrak{F} v dt$ von δW abzusetzen ist. Wir haben in solchen Fällen zu unterscheiden zwischen der von außen zugeführten Wärme δW und der vom Körper aufgenommenen Wärme δQ :

$$\delta Q = \delta W - (\mathfrak{F} v) dt. \quad (12)$$

Daraus folgt nun mit (9) die richtige Form des 1. Hauptsatzes:

$$dQ = dE - (\mathfrak{F} + \mathfrak{R}) v dt. \quad (13)$$

⁴ Vgl. etwa A. SOMMERFELD, Vorlesung über Theoretische Physik, Bd. I, S. 28. Braunschweig 1944.

Der Rückstoß $\mathfrak{F}$ ist nicht einfach dem konvektiv zugeführten Impuls $\delta \mathfrak{P}/dt$ gleichzusetzen, sondern er ist die Differenz aus diesem Impuls und jener Impulsänderung des absorbierenden Körpers, die auf der Massenänderung beruht

$$\mathfrak{F} = \frac{\delta \mathfrak{P}}{dt} - \frac{dm^0}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (14)$$

Mit der Bewegungsgleichung (11) läßt sich dafür auch schreiben

$$\mathfrak{F} = m^0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} - \mathfrak{R}, \quad (15)$$

d.h.: der Rückstoß $\mathfrak{F}$ ist die Differenz zwischen dem Trägheitswiderstand des Körpers und der von außen angreifenden Kraft $\mathfrak{R}^*$. Bemißt man diese Kraft so, daß die Geschwindigkeit v des Körpers konstant bleibt, so wird nach (15)

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{R} = 0. \quad (16)$$

Der Rückstoß führt also dem Körper keine Arbeit zu, die Rückstoßarbeit wird über die Führungskraft $\mathfrak{R}$ nach außen abgegeben oder von dort aufgenommen.

Mit (16) folgt nun aus (13) das Transformationsgesetz

$$dQ = dE = \frac{dE^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (17)$$

Die Bedingung konstanter Geschwindigkeit v ist für (17) nicht unbedingt erforderlich. Multipliziert man nämlich (15) skalar mit v (man beachte dabei, daß $v \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt} \frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$), so liefert bereits (13) für einen beliebig bewegten Körper:

$$dQ = dE - m^0 d \frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dm^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (14a)$$

in Übereinstimmung mit (14) und (7).

§3. Wärmeerzeugung durch unelastischen Stoß

Zwei Körper mit den Ruhemassen m_1^0 und m_2^0 und den Translationsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 mögen unelastisch zusammenstoßen; ihre gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoß sei v . Bei diesem Stoß geht Translationsenergie verloren, die sich in Wärme verwandelt. Sie kann sich allerdings auch in andere Energieformen, etwa in Rotationsenergie oder bei Molekülen in Anregungsenergie umsetzen, aber nehmen wir einmal an, es werde ausschließlich Wärme erzeugt. Wir bringen

* Diese Definition benutzt A. SOMMERFELD⁴.

dieses Beispiel hauptsächlich deshalb, weil aus ihm vor einigen Jahren die „bewegte“ Wärme mangels präziser Definitionen irrtümlich als *Lorentz-Invariante* gefolgert wurde.

Mit den zu v_1, v_2 und v gehörenden Vierergeschwindigkeiten $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ und Γ lautet die Stoßgleichung (Erhaltung des Viererimpulses):

$$m_1^0 \Gamma^{(1)} + m_2^0 \Gamma^{(2)} = M^0 \Gamma, \quad (18)$$

deren Zeitkomponente den Energiesatz liefert:

$$\frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{M^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (18a)$$

Die Ruhemasse M^0 nach dem Stoß darf bekanntlich nicht der Summe $m_1^0 + m_2^0$ der Ausgangsmassen gleichgesetzt werden, weil sonst die Unbekannte Γ durch die Stoßgleichung (18) überbestimmt wäre, da sie ja stets noch der Beziehung $\Gamma^2 = -c^2$ genügen muß. Der Massenzuwachs $M^0 - (m_1^0 + m_2^0) = \Delta m^0$ gibt die im Schwerpunktssystem* erzeugte Wärme $Q^0 = \Delta m^0 c^2$. Diese denken wir uns an einen mit der Geschwindigkeit v mitlaufenden Wärmebehälter abgeführt, wobei nach dem vorigen § keine zusätzliche Arbeit erforderlich ist, um die Translationsgeschwindigkeit v aufrecht zu erhalten. Sodann bringen wir die beiden übrig gebliebenen Massen m_1^0 und m_2^0 durch äußeren Eingriff wieder in ihren alten Bewegungszustand vor dem Stoß zurück. Dazu ist die Energiedifferenz

$$\frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - \frac{(m_1^0 + m_2^0) c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = |dA|$$

als Arbeit von außen zuzuführen. Die beiden ersten Glieder linker Hand sind aber nach dem Energiesatz (18a) gleich $\frac{M^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, also bleibt

$$|dA| = \frac{\Delta m^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Für diesen Kreisprozeß der beiden Stoßpartner ist diese vom Standpunkt des nicht mitbewegten Beobachters zugeführte Arbeit $|dA|$ nach dem 1. Hauptsatz gleich der erzeugten und an den Wärmebehälter abgegebenen Wärme Q , die nun mit der Geschwindigkeit v weiterläuft:

$$Q = |dA| = \frac{Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

in Übereinstimmung mit (7).

* Unter „Schwerpunktssystem“ sei jenes Bezugssystem verstanden, in welchem die Summe der dreidimensionalen Impulse vor dem Stoß verschwindet; es ist das System mit der obigen Geschwindigkeit v , in dem die beiden Massen zur Ruhe kommen.

Der Irrtum, die Stoßgleichungen (18) führten zur Lorentz-Invarianz der relativistischen Wärme, beruht auf einer unzulässigen Handhabung der relativistischen kinetischen Energie. Man kann nämlich den Energiesatz (18a) durch Hinzufügen von Gliedern umschreiben in

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - (m_1^0 + m_2^0) c^2 \right] - \\ & - \left[\frac{(m_1^0 + m_2^0 + \Delta m^0) c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - (m_1^0 + m_2^0 + \Delta m^0) c^2 \right] = \Delta m^0 c^2 = Q^0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei die beiden eckigen Klammern links die kinetische Energie vor und nach dem Stoß darstellen. Diesen Verlust an kinetischer Energie hat man nun gleich der erzeugten relativistischen Wärme Q gesetzt, die alsdann tatsächlich nach Ausweis der rechten Seite von (19) Lorentz-invariant wäre. Aber diese Überlegung ist nicht richtig. Der Begriff der relativistischen kinetischen Energie ist überhaupt mit Vorsicht zu handhaben. Während die Energiedifferenz zwischen zwei freien bewegten Massen in der klassischen Mechanik durch die Differenz ihrer kinetischen Energie vollständig erfaßt wird, ist dies in der relativistischen Mechanik nicht der Fall: hier kommt noch die Ruhemasse als eine Art potentielle Energie hinzu und diese wird durch den unelastischen Stoß ja ebenfalls geändert. Was der Verlust an kinetischer Energie in Wirklichkeit bedeutet, wird sofort klar, wenn man in (19) die einzelnen Terme linker Hand *konstruktiv* interpretiert. In diesem Sinne stellt die erste eckige Klammer die Arbeit dar, die der Beobachter aufwenden muß, um die beiden relativ zu ihm ruhenden Massen m_1^0 und m_2^0 auf die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zu bringen. Und die zweite Klammer gibt die Arbeit, die man gewinnt, wenn man die beiden Massen nach dem Stoß samt der erzeugten und ihnen anhaftenden Wärme $Q^0 = \Delta m^0 c^2$ wieder auf Ruhe abbremst. Damit ist aber die erzeugte Wärme auf *Ruhe* transformiert. Führen wir diese nun an einen ruhenden Wärmebehälter ab, so haben die beiden Massen m_1^0 und m_2^0 einen Kreisprozeß vollführt, für den die aufgewendete Arbeit, nämlich die linke Seite von (19), gleich der an den ruhenden Behälter abgeführten Wärme Q^0 ist, im Einklang zur rechten Seite von (19). Die Differenz der kinetischen Energie vor und nach dem Stoß stellt also gar nicht die mit der Geschwindigkeit v des ursprünglichen Schwerpunkts fortschreitende relativistische Wärme Q dar, sondern die im Schwerpunktsystem gebildete und durch mechanische Abbremsung relativ zum Beobachter zur Ruhe gebrachte Wärme Q^0 . Diese ist natürlich für alle Beobachter gleich groß, aber daraus folgt nicht die Lorentz-Invarianz der bewegten Wärme.

Mit der gebotenen Vorsicht bezüglich der kinetischen Energie kann man die relativistische Wärme auch am idealen Gas definieren. v_k^0 seien die

Geschwindigkeiten der Molekeln im Schwerpunktsystem, in welchem das Gas als Ganzes ruht und der Gesamtimpuls verschwindet $\left(\Sigma \frac{m_k^0 v_k^0}{\sqrt{1 - (\beta_k^0)^2}} = 0\right)$. Wir entziehen dem Gas in diesem System Wärme, bis alle Moleküle in Ruhe sind, also

$$Q^0 = \Sigma \frac{m_k^0 c^2}{\sqrt{1 - (\beta_k^0)^2}} - \Sigma m_k^0 c^2. \quad (20)$$

Für einen Beobachter, gegen den sich das Gas mit der Geschwindigkeit v bewegt, führt dieser Wärmeentzug die ungeordnete Bewegung v_k der Moleküle in eine geordnete über, bei der alle Moleküle mit der gleichen Geschwindigkeit v fortschreiten. Dieser Beobachter beurteilt die vorhin abgeführte Wärme als

$$Q = \Sigma \frac{m_k^0 c^2}{\sqrt{1 - \beta_k^2}} - \frac{\Sigma m_k^0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (21)$$

Nun gilt für die Vierergeschwindigkeit Γ des Schwerpunktsystems analog (18) auch bei beliebig vielen Massen

$$\Sigma m_k^0 \Gamma^{(k)} = (\Sigma m_k^0 + \Delta m^0) \Gamma. \quad (22)$$

Die Gleichung gilt für alle Bezugssysteme; da im Schwerpunktsystem $\Gamma = \{0, 0, 0, ic\}$ ist, folgt, daß $\Delta m^0 c^2$ durch die kinetische Energie (20) relativ zum Schwerpunktsystem gegeben ist. Mit der Zeitkomponente von (22) oder

$$\Sigma \frac{m_k^0 c^2}{\sqrt{1 - \beta_k^2}} = \frac{\Sigma m_k^0 c^2 + Q_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

schreibt sich dann (21) als

$$Q = \frac{Q^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

§ 4. Wärmeübertragung durch Strahlung

Die Darstellung der Wärme durch Strahlung hat den Vorteil, daß man die Lorentz-Transformation der Strahlung völlig beherrscht, ohne auf die Mechanik oder die Bewegungsgleichungen zurückgreifen zu müssen; gleichzeitig wird uns das Beispiel einen tieferen Einblick in die thermodynamische Seite des Problems gewähren.

a) Ein Körper C_2 von der Ruhemasse m_2^0 und der Eigentemperatur T_2^0 bewege sich mit der Geschwindigkeit v gegen einen „ruhenden“ Körper C_1 von der Ruhemasse m_1^0 und der Eigentemperatur T_1^0 . Die Inertialsysteme, in welchen die Körper ruhen, seien mit Σ_2^0 und Σ_1^0 bezeichnet. Der Körper C_2 strahle nun im Zeitelement dt_2^0 die in seinem Ruhesystem Σ_2^0 gemessene Wärmemenge dQ_2^0 isotherm* in Form von Wärmestrahlung

* Die Temperatur mag man sich hier und bei den folgenden isothermen Prozessen konstant gehalten denken etwa durch ein eingebautes Zweiphasensystem, dessen Volumenänderungsarbeit im Körper verbleibe.

aus. Diese Strahlung denken wir uns im Eigensystem Σ_2^0 des Strahlers dargestellt durch Photonen verschiedener Frequenzen ν_j^0 , die isotrop nach allen Richtungen $\hat{s}_j^0$ emittiert werden mögen, so daß die ausgesandte Strahlung in Σ_2^0 keinen Gesamtimpuls mit sich führt

$$\frac{\hbar}{c} \sum_j \nu_j^0 \hat{s}_j^0 = 0. \quad (23)$$

Der Strahlungsakt erfolgt somit ohne Rückstoß und es ist daher keine Führungskraft nötig, um den Körper C_2 im System Σ_2^0 in Ruhe zu halten. Da von C_2 keine weitere mechanische Arbeit abgegeben wird, ist die gesamte ausgesandte Strahlung gleich der Abnahme der Ruheenergie $E_2^0 = m_2^0 c^2$ und somit nach dem 1. Hauptsatz gleich der abgegebenen Wärme $|dQ_2^0|$

$$\sum_j \hbar \nu_j^0 = |dE_2^0| = |dQ_2^0|. \quad (24)$$

Diese Strahlung läßt sich nun ohne weiteres auf das System Σ_1 transformieren, in welchem C_2 die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \{v_x = v, 0, 0\}$ besitzt; denn für ein Photon von der Frequenz ν ist $N = \{\nu \hat{s}, i\nu\}$ ein Vierervektor (mit $\hbar/c$ multipliziert ist es der Impuls-Energievektor), dessen Komponenten N_k in Σ_1 sich aus den auf Σ_2^0 bezogenen Komponenten N_k^0 berechnen nach dem Schema

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{N_x^0 - i\beta N_4^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ N_y &= N_y^0, \quad N_z = N_z^0, \\ N_4 &= \frac{N_4^0 + i\beta N_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} \nu s_x &= \frac{\nu^0 s_x^0 + \beta \nu^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \nu s_y &= \nu^0 s_y^0, \quad \nu s_z = \nu^0 s_z^0, \\ \nu &= \frac{\nu^0 + \beta \nu^0 s_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die letzte der Gl. (25) liefert für die in Σ_1 auftretende Strahlungsenergie mit Rücksicht auf (24) und (23):

$$dW_{\text{Str}} = \Sigma \hbar \nu = \frac{\Sigma \hbar \nu^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{|dE_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (26)$$

und die drei ersten Gl. (25) geben den Strahlungsimpuls

$$\frac{\delta \mathfrak{P}}{dt} = \Sigma \frac{\hbar}{c} \nu s_x = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\Sigma \hbar \nu^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (27)$$

Die Energie (26) der ausgesandten Strahlung ist wegen $\beta = \text{const}$ genau gleich der Abnahme der relativistischen Gesamtenergie $E_2 = \frac{m_2^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ des strahlenden Körpers C_2

$$dW_{\text{Str}} = \left| \frac{dE_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right| = |dE_2|.$$

Die Ausstrahlung des bewegten Körpers ist auch vom Standpunkt des ruhenden Beobachters nicht mit einer mechanischen Arbeitsleistung verknüpft. Man darf nicht etwa den Impuls (27) der emittierten Strahlung (mit entgegengesetztem Vorzeichen) als Rückstoß des Strahlungsdrucks auf den Körper C_2 deuten und hieraus eine mechanische Arbeit $dA = - (v \delta \mathfrak{P}) = \frac{dQ^0 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ in Rechnung stellen. Denn der Impuls der ausgesandten Energie $dE_2 = \frac{dE_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wird durch den Strahlungsprozeß überhaupt nicht geändert, er ist vor und nach der Emission gleich $\frac{dE_2^0}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ *. Hier ist also kein Platz für eine Rückstoßarbeit und daher wird der ruhende Beobachter die gesamte Strahlungsenergie (26) nach dem 1. Hauptsatz als abgegebene relativistische Wärme

$$|dQ_2| = |dE_2| = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (28)$$

deuten müssen, die wiederum der Transformation (7) genügt.

b) Die Strahlung (26) werde nun vom Körper C_1 , der den bewegten Körper C_2 etwa als Hohlzylinder umschließe **, bei konstant gehaltener Eigentemperatur T_1^0 völlig absorbiert. Durch den zugeführten Impuls (27) würde der Körper C_1 beschleunigt werden, wir wollen ihn jedoch durch eine von außen angelegte Führungskraft $\mathfrak{R}_1$ in Ruhe halten. Da diese Kraft im Eigensystem von C_1 keine Arbeit leistet, wächst die gesamte Ruheenergie $E_1^0 = m_1^0 c^2$ von C_1 durch den Absorptionsakt um die gesamte zugeführte Strahlungsenergie, gleichgültig, ob letztere völlig als Wärme oder anders (s. dazu §6) zu deuten ist:

$$dE_1^0 = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diesen Zuwachs der Ruheenergie wird aber der ruhende Beobachter, für den keinerlei zugeführte mechanische Arbeit zu erkennen ist, als die von C_1 aufgenommene Wärme deuten:

$$|dQ_1^0| = dE_1^0 = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (29)$$

* Anders beim einzelnen Photon, dessen Energie vor der Emission den Impuls $\frac{h\nu^0}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, nach der Emission aber den Impuls $\frac{h\nu}{c} \mathfrak{s}$ besitzt. Die Differenz, der Rückstoß, verschwindet jedoch in der Summe über alle Photonen, wenn diese im System Σ_2^0 isotrop ausgesandt werden.

** Mutatis mutandis mag man sich die beiden Körper auch vorstellen als parallele, unendlich ausgedehnte schwarze Platten, die tangential zu sich verschoben werden und deren Rückseite nötigenfalls adiabatisch gegen Ausstrahlung geschützt ist.

Wir interessieren uns nun dafür, unter welchen Bedingungen dieser Wärmeübergang reversibel ist. Zu diesem Zweck suchen wir ihn wieder rückgängig zu machen, indem wir dem Körper C_1 die Wärmemenge $\frac{dQ_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ isotherm bei seiner Eigentemperatur T_1^0 entziehen und durch einen Carnot-Prozeß auf eine tiefere Temperatur T bringen. Diese untere Temperaturstufe des Carnot-Prozesses werde so gewählt, daß auf ihr die Wärme dQ_2^0 frei werde. Aus den Wärmegewichten folgt dann für diese Temperatur $T = \frac{dQ_2^0 T_1^0}{dQ_2^0 \sqrt{1-\beta^2}} = T_1^0 \sqrt{1-\beta^2}$. Gleichzeitig liefert der Carnotprozeß eine positive Arbeit $dQ_2^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$, die gerade ausreicht, um die Wärme dQ_2^0 dem bewegten Körper C_2 mittels eines Übertragers nach Art des Kreisprozesses der Fig. 1 isotherm zuzustellen. Es kommt nun alles auf die Temperatur T an, mit welcher der auf die Geschwindigkeit β adiabatisch beschleunigte Übertrager an den Körper C_2 angelegt werden kann.

1. Ist $T = T_2^0$, also gleich der Eigentemperatur von C_2 , so kann der Übertrager die Wärme dQ_2^0 an den gleichtemperierten Körper C_2 isotherm und reversibel abgeben und es ist, wenn der Übertrager wieder zur Ruhe abgebremst ist, der vorige Strahlungsübergang $C_2 \rightarrow C_1$ ohne eine in der Umgebung zurückgebliebene Änderung völlig rückgängig gemacht. Dieser Übergang war also reversibel und die Bedingung $T = T_2^0$ liefert mit dem vorhin gefundenen Wert für T die Reversibilitätsbedingung für die Eigentemperaturen

$$T_2^0 = T_1^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (30)$$

2. $T > T_2^0$ kann nicht vorkommen, da sonst Wärme entgegen dem Clausiusschen Axiom „von selbst“ zu höherer Temperatur aufgestiegen und die Konstruktion des perpetuum mobile II. Art möglich wäre.

3. $T < T_2^0$ sind die möglichen irreversiblen Prozesse; sie sind also gekennzeichnet durch die Eigentemperaturen

$$T_2^0 > T_1^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (30a)$$

Im Falle der Reversibilität müssen die Entropieänderungen beider Körper entgegengesetzt gleich sein, wobei wir uns wegen der Lorentz-Invarianz der Entropie auf die jeweiligen Eigensysteme beziehen dürfen. In der Tat folgt aus (29) und der Reversibilitätsbedingung (30)

$$|\Delta S_1^0| = \frac{|dQ_1^0|}{T_1^0} = \frac{|dQ_2^0|}{T_2^0} = |\Delta S_2^0|. \quad (31)$$

Der Strahlungsübergang von dem bewegten Körper C_2 zum ruhenden C_1 unter der Reversibilitätsbedingung (30) erhält nun eine sehr einfache Interpretation, wenn wir die relativistische Temperatur der Wärmequelle C_2 einführen. Diese ist nach (8) $T_2 = \frac{T_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und mit (30) wird daraus

$$T_2 = T_1^0 = T_1. \quad (32)$$

Wärmequelle und Wärmeempfänger haben also vom Standpunkt des Empfängers gesehen *gleiche* relativistische Temperatur; von diesem Standpunkt aus ist der reversible Wärmeübergang ein isothermer Prozeß ohne äußere Arbeitsleistung. Und für die irreversiblen Prozesse gilt nach (30a) $T_2 > T_1$, die Wärme sinkt dann von der relativistisch höheren Temperatur zur tieferen ohne äußere Arbeitsleistung ab.

Anders sehen diese Dinge aus vom Standpunkt der Wärmequelle C_2 : Für diese ist nun der Empfänger C_1 bewegt und seine relativistische Temperatur ist im Falle der Reversibilität höher als die der Quelle, nämlich $T_1 = \frac{T_1^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T_2^0}{1-\beta^2} > T_2^0$. Der reversible Wärmeübergang verläuft für den Beobachter in C_2 also von niedriger zu höherer Temperatur, was jedoch keinen Widerspruch gegen den 2. Hauptsatz darstellt, da der Übergang unter Zufuhr von mechanischer Arbeit erfolgt, welche nun durch die Führungskraft $\mathfrak{R}_1$ geleistet wird. Weitere Einzelheiten darüber im nächsten Paragraphen.

§5. Strahlungsübergänge im beliebigen Bezugssystem

Daß sich ein und derselbe Strahlungsübergang je nach dem Standpunkt des Beobachters so verschieden darstellt, beruht vor allem darauf, daß die beiden Körper C_1 und C_2 in den vorigen Betrachtungen kinematisch nicht gleichberechtigt sind (der eine wird jeweils als ruhend gedacht). Eine einheitliche Darstellung werden wir in einem Bezugssystem Σ erwarten dürfen, gegen das sich *beide* Körper (Eigensysteme Σ_1^0 und Σ_2^0) mit den Geschwindigkeiten β_1 bzw. β_2 etwa parallel der x -Achse bewegen; die im vorigen benutzte Relativgeschwindigkeit beider Körper gegeneinander werde weiterhin mit β bezeichnet (sie ist aus β_1 und β_2 natürlich nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten zu berechnen). Der Strahlungsübergang erfolge zunächst wiederum von C_2 nach C_1 . Die Vorgänge in den Eigensystemen sind natürlich unabhängig vom Bezugssystem und können dem vorigen Paragraphen entnommen werden, insbesondere gilt für die in den Eigensystemen aufgenommene und abgegebene Wärme nach (29)

$$dQ_1^0 = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Auf das System Σ bezogen ist aber nach dem Transformationsgesetz (7) die von C_2 abgegebene Wärme $|dQ_2| = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$ nicht gleich der von C_1 aufgenommenen Wärme $|dQ_1| = \frac{|dQ_1^0|}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{|dQ_2^0|}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\beta_1^2}}$. Der Unterschied erklärt sich aus dem Stoß, den die Wärme auf C_1 vermöge des mitgebrachten Impulses ausübt. Dadurch wird Wärme in mechanische Arbeit umgesetzt und diese über die Führungskraft $\mathfrak{R}_1$ nach außen abgeführt. Man kann dies im einzelnen durchrechnen und bestätigen, doch ergibt sich alles viel einfacher, wenn wir die allgemeine Gl. (12) im System Σ einerseits auf C_2 und andererseits auf C_1 anwenden:

$$dQ_2 = dW_2 - (\mathfrak{F}_2 v_2) dt; \quad dQ_1 = dW_1 - (\mathfrak{F}_1 v_1) dt.$$

Da die von C_2 abgestrahlte Gesamtenergie dW_2 gleich der von C_1 aufgenommenen Gesamtenergie dW_1 sein muß und da ferner der Körper C_2 durch die Emission keinen Rückstoß $\mathfrak{F}_2$ erfährt und daher auch keine Führungskraft $\mathfrak{R}_2$ zur Aufrechterhaltung seiner Geschwindigkeit v_2 erfordert, folgt mit (16)

$$|dQ_2| - |dQ_1| = (\mathfrak{F}_1 v_1) dt = -(\mathfrak{R}_1 v_1) dt.$$

Es werde vorausgesetzt, daß der Strahlungsübergang $C_2 \rightarrow C_1$ reversibel erfolge, daß also für die Eigentemperaturen die Bedingung (30)

$$T_2^0 = T_1^0 \sqrt{1-\beta^2}$$

erfüllt sei. Der Vorgang ist dann natürlich in jedem Inertialsystem reversibel, insbesondere in Σ . In diesem System ist nun die relativistische Temperatur von C_2 nach (8) gleich $T_2 = \frac{T_2^0}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$ und die von C_1 nach

$$(8) \text{ und } (30) \text{ gleich } T_1 = \frac{T_1^0}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{T_2^0}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\beta_1^2}} = T_2 \frac{\sqrt{1-\beta_2^2}}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\beta_1^2}} \neq T_2.$$

Die relativistischen Temperaturen von Wärmequelle und Empfänger sind also in Σ verschieden. Wieso ist trotz dieses Temperatursprungs ein reversibler Wärmetübergang möglich? Wir müssen uns vorstellen, daß die Wärme, die zunächst noch die Temperatur T_2 der Quelle besitzt, sich bei der vorhin besprochenen Stoßarbeit abkühlt, und zwar wegen der Reversibilität isentropisch abkühlt. Der Effekt ist uns geläufig bei einem Strahlenbündel der schwarzen Strahlung, wenn dieses an einem bewegten zurückweichenden Spiegel reflektiert wird; vermöge des Lichtdrucks leistet es Arbeit und kühlt sich ab. An Stelle der Reflexion am bewegten Spiegel tritt nun die Absorption an einer bewegten schwarzen Wand. Die Endtemperatur T nach der Abkühlung ergibt sich aus den

obigen Wärmemengen dQ_2 und dQ_1 vor und nach der Arbeitsleistung vermöge der Konstanz der Entropie

$$|\Delta S| = \frac{|dQ_2|}{T_2} = \frac{|dQ_1|}{T} \quad \text{zu} \quad T = T_2 \left| \frac{dQ_1}{dQ_2} \right| = T_2 \frac{\sqrt{1-\beta_2^2}}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta_1^2}} = T_1.$$

Die relativistische Endtemperatur T , welche die Wärme nach ihrer Stoßarbeit im System Σ annimmt, stimmt also im Falle der Reversibilität (30) genau mit der relativistischen Temperatur T_1 des Empfängers überein, der die Wärme sodann isotherm-reversibel aufnehmen kann. Im irreversiblen Falle (30a) ist die Wärme nach ihrer Stoßarbeit noch zu heiß; sie kühlt sich dann, ohne weitere Arbeit zu leisten, auf die nach Voraussetzung konstant gehaltene Temperatur T_1 des kälteren Empfängers ab, wobei die Entropie wächst. In dieser Abkühlung liegt die Irreversibilität begründet.

Den umgekehrten Strahlungsübergang von C_1 auf C_2 erhält man aus den obigen Ergebnissen nun einfach durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 und Vorzeichenumkehr von β . Dabei kehrt sich die Reversibilitätsbedingung (30) um:

$$T_1^0 = T_2^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (30b)$$

Wenn also der Strahlungsübergang $C_2 \rightarrow C_1$ reversibel ist, so ist der Übergang $C_1 \rightarrow C_2$ irreversibel und vice versa. Dieser scheinbare Widerspruch, daß die Umkehrung eines reversiblen Prozesses irreversibel sein soll, klärt sich auf, wenn man beachtet, daß es sich bei den Übergängen $C_2 \rightarrow C_1$ und $C_1 \rightarrow C_2$ gar nicht um die Umkehrung *ein und desselben* Vorgangs handelt. Die von einer bewegten Quelle zugestrahlte Wärme fällt nämlich im System des Empfängers stets mit einem Impuls ein, die von diesem Empfänger abgestrahlte Wärme verläßt denselben aber *ohne* Impuls. Darin liegt der Unterschied. Zwei verschieden bewegte Körper, die einander zustrahlen, können nicht im Wärmegleichgewicht stehen, da die Bedingungen (30) und (30b) nicht gleichzeitig erfüllbar sind, außer im trivialen Fall $\beta = 0$, $T_1^0 = T_2^0$. Die Führungskräfte leisten bei gegenseitiger Zustrahlung dauernd Arbeit, die sich zum Teil irreversibel in Wärme umsetzt, so daß die Gesamtentropie fortwährend wächst. Läßt man die Führungskräfte weg, so entnehmen die Körper die nötige Arbeit ihrer Bewegungsenergie; wie bei der inneren Reibung eines zähen Mediums wird durch den Impulsaustausch der schnellere Körper verlangsamt und der langsamere beschleunigt, bis beide gleiche Geschwindigkeit erlangt haben. Dann erst stehen sie im Wärmegleichgewicht, falls sie gleiche Eigentemperaturen haben.

Im vorigen wurden die beiden Strahlungsübergänge $C_2 \rightarrow C_1$ und $C_1 \rightarrow C_2$ getrennt voneinander behandelt, in Wirklichkeit laufen aber

beide Prozesse gleichzeitig ab, denn ein Körper, der absorbiert, emittiert zugleich. Wir glauben aber nicht, daß man gegen die theoretische Trennung der beiden Prozesse einen ernsten Einwand erheben könnte.

§ 6. Eindeutigkeit der Transformationsformeln

Schon EINSTEIN hat vermutet, die Festsetzung der relativistischen Wärme könnte vielleicht eine reine Definitionsangelegenheit sein. In der Tat ist die Transformation (7) nicht die einzig mögliche. Man kann nämlich die relativistische Wärme dQ mittels des 1. Hauptsatzes unter Abänderung der Definition (2) auch durch

$$dE + dA = dQ g(\beta) \quad (2a)$$

definieren, worin $g(\beta)$ eine geeignete (gerade und monotone) Funktion der Geschwindigkeit β ist mit dem Grenzwert $g(0) = 1$. Im Eigensystem stimmt die neue Definition von dQ^0 mit der alten überein. Da im bewegten System die linke Seite von (2a) unsere frühere relativistische Wärme

$$dQ = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

darstellt, lautet die Transformationsformel der durch (2a) definierten Wärme nun

$$dQ = \frac{dQ^0}{g(\beta) \sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7a)$$

In gleicher Weise transformiert sich auch die Temperatur, wenn man den 2. Hauptsatz in der Form $dS = dQ/T$ beibehält (s. dazu jedoch weiter unten!). Die eigentliche physikalische Bedeutung der Abänderung (2a) erkennt man am besten, wenn man die rechte Seite umformt:

$$dE + dA = dQ + dQ(g-1). \quad (2b)$$

Hieraus wird ersichtlich, daß die Energie, welche früher in ihrer Gesamtheit als abgegebene bewegte Wärme $\frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ angesprochen wurde, nun zerfällt in die eigentliche relativistische Wärme dQ und in einen Anteil $dQ(g-1)$, der die Rolle einer konvektiven mechanischen Energie spielt. Diese Energie wird nicht durch die Arbeit irgend einer Wechselwirkungskraft abgeführt, sondern ist zu deuten als eine mit der Wärme dQ verbundene und von ihr mitgeführte mechanische Energie.

Wir betrachten drei spezielle Werte von $g(\beta)$:

1. Für $g(\beta) = 1$ kommen wir natürlich auf die früheren Ergebnisse zurück. Die bewegte Wärme ist $dQ = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, mechanische Energie wird von der Wärme nicht mitgeführt: $dQ(g-1) = 0$.

2. Für $g(\beta) = \frac{1}{1-\beta^2}$ ergibt sich das bisher übliche Transformationsgesetz $\star dQ = dQ^0 \sqrt{1-\beta^2}$ und eine konvektive mechanische Energie von der Größe $dQ(g-1) = \frac{dQ^0 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

3. Für $g(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wird die Wärme (und somit auch die Temperatur) Lorentz-invariant, $dQ = dQ^0$; die bewegte Wärme führt die mechanische Energie $dQ(g-1) = dQ^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ mit sich. Das letzte Ergebnis mag bestechend erscheinen, da diese Energie gewissermaßen als kinetische Energie der bewegten Lorentz-invarianten Wärme dQ^0 aufgefaßt werden könnte. Versucht man aber mit dieser Aufspaltung in Wärme dQ und konvektive Energie $dQ(g-1)$ den Wärmetübergang auf einen Empfänger anderer Geschwindigkeit durchzurechnen, so werden die Prozesse außerordentlich kompliziert: ein Teil der konvektiven Energie leistet bei der Absorption Arbeit, welche durch die Führungskraft nach außen abgeführt wird; ein anderer Teil geht als mechanische Energie in den Empfänger über und der Rest verwandelt sich in Wärme, wobei er zugleich die Temperatur der Lorentz-invarianten Wärme dQ^0 anzuheben hat $\star\star$. Nun ist aber wirklich die Frage berechtigt, ob die durch (2b) bedingte Aufspaltung der abgegebenen Energie in Wärme und konvektive mechanische Energie überhaupt einen physikalischen Sinn hat $\star\star\star$, nachdem sie sich doch wohl der Beobachtung entzieht, denn beobachtbar ist letzten Endes nur die Wärme, die ein Körper in seinem *Eigensystem* abgibt und die Wärme (nebst dem Rückstoß), die ein anderer daraufhin in seinem *Eigensystem* aufnimmt. Was dazwischen liegt, ist mehr oder weniger Sache hypothetischer Interpretation. Natürlich wird man jenes Transformationsgesetz bevorzugen, welches diese Zusammenhänge am einfachsten beschreibt, aber gerade dieses leistet die Abänderung (2a) *nicht*. Aus diesem Grunde verwirft v. LAUE⁵ die Abänderung (2a), sowie eine mögliche analoge Abänderung des 2. Hauptsatzes (s. unten!), „da diese, wenn man sie durchzuführen versucht, so tief in unsere Anschauungen und sogar in die Ausdrucksweise eingreifen, daß man [der Definition (2)] doch wohl den Vorzug geben wird“. Aber was als einfach anzusehen ist, ist freilich recht subjektiv, so daß darüber kaum eine Einigung zu erzielen sein dürfte. Somit bleibt

$\star$ Dies bedeutet aber nicht, daß die eingangs kritisierte Herleitung dieses Gesetzes nachträglich gerechtfertigt würde, sie bleibt, wenn man (2) zugrunde legt, nach wie vor falsch.

$\star\star$ Die Reversibilitätsbedingung (30) ist unabhängig von jeder Transformationsformel der Wärme oder der Temperatur.

$\star\star\star$ Wobei es noch offen bleibt, welchem der beiden Energieanteile der Impuls (27) zuzuordnen wäre.

⁵ LAUE, M. v., l. c. S. 171.

nach wie vor die unbefriedigende Tatsache bestehen, daß die relativistische Wärme dQ durch den 1. *Hauptsatz allein* überhaupt nicht eindeutig zu definieren ist. Verwunderlich ist dies freilich nicht, denn der 1. Hauptsatz besagt ja nur, daß die Wärme eine Energieform ist, und er läßt uns im Stich bei der Frage, ob ein strittiger Term — nämlich der Term $dQ(g-1)$ in (2b) — als Wärme anzusehen ist oder als konvektiv fortgeführte mechanische Energie. Erst im *zweiten* Hauptsatz kommt die Eigenschaft, durch die sich die Wärme *qualitativ* von allen anderen Energieformen unterscheidet, zum Ausdruck: Bei allen reversiblen Prozessen wächst die *Entropie* eines Systems nur bei Zufuhr von *Wärme* und nicht bei Zufuhr irgend einer anderen Energie. Aber der 2. Hauptsatz ist für unsere Zwecke zunächst ein Leerlauf, solange wir noch wie bisher über die Transformation der relativistischen Temperatur frei verfügen und diese so einrichten können, daß der 2. Hauptsatz auf alle Fälle erfüllt wird. Wäre es aber möglich, das Transformationsgesetz der Temperatur *unabhängig von dem der Wärme* aufzustellen, so wäre letztere durch den zweiten Hauptsatz $dQ = T dS$ eindeutig festgelegt. Dies gelingt in der Tat, wenn man die *Permanenz der thermodynamischen Axiome* fordert, d. h.: die Axiome der klassischen Thermodynamik sollen so weit als möglich in die relativistische übernommen werden. So vor allem: Auch zwischen zwei verschieden bewegten Körpern steigt die Wärme gemessen in den *relativistischen* Temperaturen nicht von selbst (d. h.: ohne Aufwand von Energie) zu höherer Temperatur auf, sondern sinkt stets vom relativistisch heißeren Körper zum kälteren ab. Der Vorgang ist irreversibel, wenn zwischen beiden Körpern eine endliche Temperaturdifferenz besteht; ein reversibler Wärmeübergang ohne Arbeitsleistung und ohne sonstige in der Umgebung zurückbleibende Änderungen verlangt die Gleichheit der relativistischen Temperatur beider Körper. Dieser Forderung genügt *nur* das Transformationsgesetz (8) der Temperatur

$$T = \frac{T^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8)$$

Zur Bestätigung verweisen wir auf das Beispiel im § 4, Absatz b, in welchem Wärmestrahlung von einer bewegten Wärmequelle C_2 auf einen ruhenden Empfänger C_1 übergeht. Bereits am Schluß des § 4 wurde darauf hingewiesen, daß dieser Übergang nach der Transformation (8) im Falle der Reversibilität als ein in den relativistischen Temperaturen isothermer Vorgang angesprochen werden kann [s. Gl. (32)]. Umgekehrt verlangen wir nun ohne Berufung auf (8) lediglich auf Grund unseres Axioms, daß im System von C_1 , dem einzigen Bezugssystem, in welchem der Strahlungsübergang ohne äußere Arbeitsleistung erfolgt, im Falle der Reversibilität die relativistischen Temperaturen von C_2 und C_1 gleich seien: $T_2 = T_1^0$. Dann folgt aus der Reversibilitätsbedingung

$T_1^0 = \frac{T_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ sofort das Transformationsgesetz (8)

$$T_2 = \frac{T_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8)$$

Und für die irreversiblen Übergänge gilt $T_2 > T_1^0$.

Das Transformationsgesetz (8) für die Temperatur liefert nun vermöge der Invarianz der Entropie $dS = dQ/T$ aus dem *zweiten Hauptsatz* (und nicht wie früher aus dem ersten!) eindeutig das Transformationsgesetz der relativistischen Wärme

$$dQ_2 = \frac{dQ_2^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7)$$

Wir können nun auch ein Meßverfahren für die relativistische Wärme definieren: Die relativistische Wärme dQ werde gemessen, indem man sie *ohne resultierende Arbeitsleistung* auf einen im System des Beobachters ruhenden Körper überführt, wo sie dann nach den üblichen Methoden gemessen werden kann. Die in §4, Absatz b betrachtete Ausstrahlung eines bewegten Körpers gegen einen ruhenden Empfänger ist für dieses Meßverfahren wegen der unvermeidlichen Rückstrahlung des Empfängers praktisch allerdings nicht brauchbar. Man kann die Übertragung der Wärme praktisch aber durch Umkehrung des Kreisprozesses der Fig. 1 vornehmen. Der Übertrager entzieht dabei dem bewegten Wärmebehälter in dessen Eigensystem bei der Eigentemperatur T^0 die Wärme dQ^0 , also die relativistische Wärme $dQ = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, und stellt dem ruhenden Behälter diese Wärme dQ^0 mit der Temperatur T^0 zu. Außerdem liefert der Kreisprozeß des Übertragers den Überschuß $dQ^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ an kinetischer Energie*. Verwandeln wir diese auf irgend eine Weise in Wärme, so tritt im ruhenden System insgesamt die Wärme $dQ^0 + dQ^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ auf, also die relativistische Wärme dQ . Die Temperatur von Wärmequelle und Empfänger interessiert zunächst nicht. Wenn wir dieses Meßverfahren als eine *neue*, von der Temperatur unabhängige *Definition* der relativistischen Wärme postulieren, so werden die beiden Transformationsformeln (7) und (8) *unabhängig* voneinander. Mit diesem Ergebnis wird die von v. LAUE erwähnte, aber aus subjektiven Gründen abgelehnte Abänderung des zweiten Hauptsatzes

* Der ganze Prozeß kann aufgefaßt werden als isentrope Abkühlung der Wärme unter Arbeitsleistung: durch ihre Überführung vom bewegten System in das ruhende des Beobachters wird die relativistische Wärme $\frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ auf dQ^0 reduziert, die Differenz in Arbeit umgesetzt und die relativistische Temperatur $\frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ auf T^0 erniedrigt.

$dS = \frac{dQ}{T} \cdot f(\beta)$ mit einer willkürlichen Geschwindigkeitsfunktion $f(\beta)$ überhaupt unmöglich; f ist nun notwendig gleich Eins.

Die vorhin angedeutete Umsetzung der kinetischen Energie $dQ^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ des Übertragers in Wärme kann irreversibel (z.B. durch Reibung) oder auch reversibel etwa durch isotherme Kompression eines idealen Gases bei der Temperatur T^0 erfolgen. Im letzten Falle ist aber in der Umgebung des Wärmebehälters ein Rückstand übrig geblieben, nämlich das komprimierte Gas. Solche Rückstände lassen sich nur vermeiden, wenn alle bei der Wärmeübertragung beteiligten Substanzen *Kreisprozesse* ausführen. Man muß also den Überschuß $dQ^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ der kinetischen Energie des Übertragers durch einen Carnotprozeß in Wärme umsetzen, welcher die vom Übertrager mitgebrachte Wärme dQ^0 auf den Betrag $\frac{dQ^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und ihre Temperatur T^0 auf $\frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ anhebt. Ist diese gleich der Temperatur T_1^0 eines ruhenden Wärmebehälters, so kann die Wärme auf diesen reversibel übergehen; ist sie größer als T_1^0 , so kann die Wärme gleichfalls noch übergehen, aber nur irreversibel wegen des Temperatursprungs; ist jedoch $\frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}} < T_1^0$, so ist ein Wärmeübergang nach dem 2. Hauptsatz unmöglich. Der Fallunterscheidung $\frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \gtrless T_1^0$ entspricht nun nach unserem Axiom die Formel $T \gtrless T_1^0$ für die relativistische Temperatur T und hieraus folgt unabhängig von der früheren Herleitung wiederum die Transformation $T = \frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Im Falle $T = T_1^0$ ist das Endergebnis beider Kreisprozesse zusammen also eine *reversible isotherme* Überführung der Wärme in das Ruhesystem ohne resultierende Arbeitsleistung und ohne sonstige in der Umgebung zurückbleibende Änderungen.

Die Transformationsgesetze (7) und (8) kommen der von v. LAUE und bereits früher schon von MACH erhobenen Forderung auf möglichst einfache Beschreibung des Naturgeschehens entgegen. Um dies zu zeigen, betrachten wir zwischen zwei verschiedenen bewegten Körpern C_1 und C_2 von den Eigentemperaturen T_1^0 und T_2^0 einen *reversiblen* Wärmeübergang, der vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters *ohne Arbeitsaufwand* erfolgen soll. Zu diesem Zweck denken wir uns die Wärme dQ_2^0 von C_2 mittels eines Übertragers nach Art des Kreisprozesses der Fig. 1 in das Ruhesystem des Beobachters überführt. Dort werde sie einem Carnot-Prozeß unterworfen, der die Wärme dQ_2^0 bei der Temperatur T_2^0 aufnimmt und die Wärme dQ_1^0 mit der Temperatur T_1^0 abgibt.

Letztere überführen wir mit einem Übertrager im Kreisprozeß auf den Körper C_1 . Den Carnotprozeß haben wir so zu bemessen, daß seine Arbeit die Arbeit der Übertrager deckt, also $dQ_1^0 - dQ_2^0 = dQ_2^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - 1 \right) - dQ_1^0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - 1 \right)$. Daraus folgt $\frac{dQ_2^0}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{dQ_1^0}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$. Die Gleichung besagt, daß die relativistische Wärme bei Übertragung ohne Arbeitsleistung konstant bleibt. Für die Temperaturen liefert der Carnot-Prozeß $\frac{T_2^0}{T_1^0} = \frac{dQ_2^0}{dQ_1^0} = \frac{\sqrt{1-\beta_2^2}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$ oder $\frac{T_2^0}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{T_1^0}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$. Also sind für den ruhenden Beobachter auch die relativistischen Temperaturen beider Körper gleich. Wir wenden uns nun zur Lorentz-Transformation der Jouleschen Wärme.

§ 7. Leiterstrom und Energiesatz

Der relativistische Leiterstrom ist in der Literatur nicht einheitlich definiert. Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei seine Definition zunächst klar gestellt, selbst auf die Gefahr hin, bekannte Dinge wiederholen zu müssen.

Im Ruhesystem Σ^0 eines Leiters von der Leitfähigkeit σ ist der Leiterstrom j_L ohne Zweifel gegeben durch das Ohmsche Gesetz

$$j_L^0 = \sigma \mathfrak{E}^0 \quad (33)$$

und er erzeugt dort in der Volumen- und Zeiteinheit die Joulesche Wärme

$$q^0 = j_L^0 \mathfrak{E}^0. \quad (34)$$

Mit einer in Σ^0 allenfalls noch vorhandenen beliebigen Ladungsdichte ϱ^0 läßt sich der Strom (33) zusammenfassen zum Viererstrom*

$$s^0 = \{\sigma \mathfrak{E}^0, i c \varrho^0\}. \quad (35)$$

Um diesen Lorentz-invariant darzustellen, betrachte man zwei Vierervektoren K und A , die mittels der Vierergeschwindigkeit Γ des bewegten Leiters und des antisymmetrischen Feldtensors F (in praktischen Einheiten)

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \left\{ \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \\ F &= \{F_{23} F_{31} F_{12}; F_{14} F_{24} F_{34}\} = \left\{ \mathfrak{B}; -\frac{i}{c} \mathfrak{E} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

definiert seien als

$$K = \varrho^0 \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \{\varrho^0 v, i c \varrho^0\}, \quad (37)$$

$$A = \sigma [F \Gamma]^{**} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \mathfrak{E} + [v \mathfrak{B}], \frac{i}{c} (v \mathfrak{E}) \right\}. \quad (38)$$

K ist der Konvektionsstrom der Ruheladung ϱ^0 , A heißt „Viererleitung“.

* Die Größen in geschweiften Klammern bedeuten im folgenden stets die Komponenten eines Vierer- oder Sechser-Vektors.

** Das Vektorprodukt hat die Komponenten $[F \Gamma]_i = F_{ik} \Gamma_k$, wobei noch $F_{ik} = -F_{ki}$ zu berücksichtigen ist; σ spielt hier die Rolle einer Lorentz-Invarianten.

Mit der „treibenden“ EMK

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \quad (39)$$

lautet (38) einfacher

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \mathfrak{E}^*, \frac{i}{c} (\mathfrak{v} \mathfrak{E}^*) \right\}. \quad (38a)$$

Für $\mathfrak{v}=0$, also im Ruhesystem Σ^0 des Leiters, ist nun die Vektorsumme aus $\mathcal{A}^0 = \{\sigma \mathfrak{E}^0, 0\}$ und $\mathcal{K}^0 = \{0, i c \varrho^0\}$ nach (35) ersichtlich gleich dem dortigen Viererstrom $s^0 = \mathcal{A}^0 + \mathcal{K}^0$, eine echte Vierergleichung, die infolgedessen für den Viererstrom s in jedem Bezugssystem Σ gilt:

$$s = \mathcal{A} + \mathcal{K}. \quad (40)$$

Mit den Komponenten des Viererstroms

$$s = \{\mathfrak{j}, i c \varrho\} \quad (41)$$

liefert die Aufspaltung von (40) in Raum und Zeit den dreidimensionalen Strom

$$\mathfrak{j} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\sigma \mathfrak{E}^* + \varrho^0 \mathfrak{v}) \quad (42)$$

und die gesamte Ladungsdichte

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\varrho^0 + \frac{\sigma}{c^2} (\mathfrak{v} \mathfrak{E}^*) \right). \quad (43)$$

Ein bewegter Leiter, selbst wenn er in seinem Ruhesystem elektrisch neutral ist ($\varrho^0=0$), erscheint demnach geladen mit der sog. Leiterdichte

$$\lambda = \frac{\sigma}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} (\mathfrak{v} \mathfrak{E}^*). \quad (44)$$

Das Auftreten dieser Zusatzladung λ darf man nicht ganz außer acht lassen, wenn man später die dynamischen Vorgänge richtig verstehen will. Mittels (43) eliminieren wir aus (42) die Ruheladung ϱ^0 , so daß nur noch elektrische Größen ($\varrho, \mathfrak{E}^*$) vorkommen, die in Σ unmittelbar gemessen werden können:

$$\mathfrak{j} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\mathfrak{E}^* - \frac{\mathfrak{v}}{c^2} (\mathfrak{v} \mathfrak{E}^*) \right) + \varrho \mathfrak{v}. \quad (45)$$

Für die magnetischen Wirkungen ist natürlich der gesamte Strom (45) maßgebend, aber dieser enthält noch den Konvektionsstrom $\varrho \mathfrak{v}$ der Ladungsdichte (43), der nichts zur *Stromwärme* oder zu elektrolytischen Erscheinungen beiträgt. Als Leiterstrom j_L wird man daher den Strom $\mathfrak{j}$ nach Abzug des gesamten Konvektionsstroms $\varrho \mathfrak{v}$ anzusehen haben:

$$j_L = \mathfrak{j} - \varrho \mathfrak{v} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\mathfrak{E}^* - \frac{\mathfrak{v}}{c^2} (\mathfrak{v} \mathfrak{E}^*) \right). \quad (46)$$

Manche Lehrbücher definieren als Leiterstrom die Raumkomponente der Viererleitung $A_r = \frac{\sigma \mathfrak{E}^*}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (38a). Gewiß ist A_r nach (42) der Stromanteil, der auf Grund der Leitfähigkeit σ entsteht, aber dieser Strom ist, wie ein Blick auf die Zeitkomponente von (38a) zeigt, begleitet von der Ladungsdichte A_4/ic gleich der Leiterdichte λ (44); er enthält also noch den Konvektionsstrom λv der Leiterdichte, der ebenfalls nichts zur Stromwärme beiträgt und herauszuheben ist. Auch dies führt zu (46).

Um später den Gedankengang nicht unterbrechen zu müssen, seien noch einige wichtige Beziehungen vorweggenommen. Die an der Volumeneinheit des Leiters angreifende dreidimensionale Lorentz-Kraft

$$\mathfrak{L} = \varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{j} \mathfrak{B}] \quad (47)$$

ist, wie man leicht nachprüft, die Raumkomponente des Vierervektors $[Fs]$. Durch dessen Zeitkomponente, die Leistungsdichte $(\mathfrak{j} \mathfrak{E})$ ergänzt, stellt sie somit einen Vierervektor, die „vierdimensionale Lorentz-Kraft“ L dar:

$$L = \{L_1 L_2 L_3 L_4\} = \left\{ \mathfrak{L}, \frac{i}{c} \mathfrak{j} \mathfrak{E} \right\} = [Fs] \quad (48)$$

Durch skalare Multiplikation mit Γ (35) entsteht die Invariante (ΓL) , die wir in Σ berechnen, wegen der Invarianz aber sofort auch auf $\Sigma^0 (v=0)$ beziehen dürfen:

$$(\Gamma L) = \sum_{k=1}^4 \Gamma_k L_k = \frac{\mathfrak{L} v - \mathfrak{j} \mathfrak{E}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\mathfrak{j}^0 \mathfrak{E}^0 \quad (49a)$$

Weiter folgt aus (48)

$$(\Gamma L) = (\Gamma [Fs]) = -(s[FI])^* = -\frac{\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^*}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (49b)$$

Vergleich dieser Gleichungen liefert mit Rücksicht auf (33) und $\mathfrak{j}_L^0 = \mathfrak{j}^0$:

$$\mathfrak{j} \mathfrak{E} - \mathfrak{L} v = \mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^* = q^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (49)$$

Die erste dieser Doppelgleichung ergibt sich auch elementar: $\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^* = (\mathfrak{j} - \varrho v, \mathfrak{E} + [v \mathfrak{B}]) = \mathfrak{j} \mathfrak{E} - (\varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{j} \mathfrak{B}], v) = \mathfrak{j} \mathfrak{E} - \mathfrak{L} v$. Daß es sich in $\frac{\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^*}{\sqrt{1-\beta^2}}$ aber um eine Invariante handelt, kann nur die Vierergleichung zeigen.

Man darf nun nicht in den Irrtum verfallen, $\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^*$ stelle etwa in Analogie zu $\mathfrak{j}^0 \mathfrak{E}^0 = q^0$ jetzt die Stromwärme q im System Σ dar, womit freilich die Transformation (1) bestätigt wäre. Tatsächlich wissen wir über den Ausdruck $\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^*$ aber vorerst nicht mehr, als was Gl. (49) besagt,

* Zur Ausrechnung beachte man: $[FI]$ ist bereits durch (38) oder (38a) gegeben und $\mathfrak{j} - \varrho v = \mathfrak{j}_L$.

nämlich, daß er durch $\sqrt{1-\beta^2}$ dividiert die Invariante q^0 darstellt. Zur Berechnung von q müssen wir uns vielmehr auf den Energiesatz der Elektrodynamik stützen und diesen in die Form des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik bringen. Die Maxwell'schen Gleichungen in der Form $\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{j} + \dot{\mathfrak{D}}$, $\text{rot } \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}}$, worin natürlich $\mathfrak{j}$ mit unserem magnetisch wirksamen Gesamtstrom (45) identisch ist, sind bekanntlich Lorentz-invariant, wenn man Feld und Koordinaten sachgemäß transformiert und die relativistischen Verknüpfungsgleichungen zwischen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ benutzt. Daher gilt mit dem Energiestrom $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ und der Energiedichte $\eta = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B})$ der Energiesatz:

$$\mathfrak{E} \text{ rot } \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \text{ rot } \mathfrak{E} = -\text{div } \mathfrak{E} = \mathfrak{j}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{j}\mathfrak{E} + \frac{\partial \eta}{\partial t}^* \quad (50)$$

Ersetzt man hierin die gesamte Leistung des Stromes nach (49) durch

$$\mathfrak{j}\mathfrak{E} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^*)$$

so folgt

$$-\text{div } \mathfrak{E} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathfrak{Q}\mathfrak{v}) + \mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^* \quad (50a)$$

Und diese beiden letzten Gleichungen hat man irrtümlich dahin interpretiert (s. etwa M. v. LAUE, l. c. S. 137), als sei „zu den beim ruhenden Leiter auftretenden Summanden nun einfach die mechanische Leistung $(\mathfrak{Q}\mathfrak{v})$ der Lorentz-Kraft hinzugetreten“, so daß sich $\mathfrak{j}_L \mathfrak{E}^*$ als die erzeugte Wärme im bewegten Leiter erweise im Einklang zu (1). Der Trugschluß liegt nun darin, daß man die Leistung $(\mathfrak{Q}\mathfrak{v})$ der Lorentz-Kraft fälschlich *gleich* dem Zuwachs der Bewegungsenergie des Leiters setzt, während sie in Wirklichkeit, wie sich später herausstellen wird, auch einen Beitrag zur bewegten Wärme liefert. Ein Beispiel dieser Art, daß sich die durch eine äußere Kraft zugeführte mechanische Energie zum Teil in Wärme umsetzt, gibt es ja schon in der klassischen Mechanik: Wenn ein bewegter Körper, an dem die äußere Kraft $\mathfrak{K}$ angreift, eine ruhende Masse μ^0 durch unelastischen Stoß in seine volle Bewegung $\mathfrak{v}$ mitreißt, hat die Arbeit $(\mathfrak{K}\mathfrak{v})$ der Kraft $\mathfrak{K}$ nicht nur den Zuwachs der Bewegungsenergie, sondern auch die beim unelastischen Stoß erzeugte Wärme $\frac{\mu^0}{2} v^2$ zu decken. Eine eindeutige Aufspaltung von $(\mathfrak{Q}\mathfrak{v})$ in eine rein mechanische Leistung und in den Wärmebeitrag ist nun in der Relativitätstheorie

* Beim bewegten Dielektrikum sind die Terme $\mathfrak{E}d\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}d\mathfrak{B}$ für sich allein im Hinblick auf die relativistischen Verknüpfungsgleichungen ($\mathfrak{D}$ ist hier ja Funktion von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, desgleichen $\mathfrak{B}$) keine vollständigen Differentiale mehr, wohl aber ihre Summe. Zum Beweis verifiziere man (am einfachsten, indem man die Terme durch das Feld des Ruhesystems ausdrückt) die Beziehung $\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{E}\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}}$, also

$$2(\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}}) = \frac{d}{dt} (\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}) = 2 \frac{d\eta}{dt}.$$

schwer durchzuführen, solange die erzeugte Wärme im Leiter verbleibt, da sie ja dann vermöge ihrer Masse ebenfalls zur mechanischen Energie des Leiters beiträgt.

§8. Energiesatz und 1. Hauptsatz

Um klare Verhältnisse zu schaffen, versuchen wir den Energiesatz (50a) auf die Form des 1. Hauptsatzes (2) zu bringen (die er noch nicht hat!), nämlich: Zugeführte Energie = Erhöhung der Gesamtenergie des Leiters + abgeführte Wärme $|q|$. In Verfolg dieses Ziels erweist es sich als zweckmäßig, die mechanisch-thermodynamische Energie des Leiters konstant zu halten. Wir erreichen dies, indem wir die Beschleunigung, die der Leiter von seiten der Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}$ im allgemeinen erfahren würde, durch eine zusätzliche mechanische Gegenkraft unterbinden und indem wir ferner die erzeugte Wärme, die auch ihrerseits durch ihre Masse die Bewegungsenergie des Leiters ändern würde, jeweils sofort nach außen abführen. Diese beiden Bedingungen seien noch etwas näher präzisiert:

a) Am Leiter denke man sich von außen her eine zusätzliche, *rein mechanische* Kraft $\mathfrak{R}$ angreifen, welche ihn zusammen mit der Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}$ in Ruhe, bzw. auf konstanter Translationsgeschwindigkeit v halte („Führungskraft“). Die mechanischen Spannungen, welche im Ruhesystem Σ^0 von den Stützen der Stützkraft $\mathfrak{R}^0$ ausgehend sich ins Innere des Leiters fortsetzen, ergänzen die dort gegebenenfalls schon vorhandenen Spannungen zu einem Spannungsfeld t_{ik}^0 , dessen Kraft-dichte $\mathfrak{f}^0 = \text{div } t_{ik}^0$ die Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}^0$ (zum mindesten im statischen Fall) Punkt für Punkt aufhebt:

$$\mathfrak{f}^0 + \mathfrak{L}^0 = 0. \quad (51)$$

Zeitabhängige elektromagnetische Felder $\mathfrak{L}^0$ werden sich freilich im allgemeinen nicht punktweise durch eine einfache Stützkraft $\mathfrak{R}^0$ kompensieren lassen, selbst dann nicht, wenn man sich $\mathfrak{R}^0$ durch zeitabhängige Oberflächenspannungen realisiert denkt, denn man kann mit solchen Randspannungen von außen her nicht eine beliebige zeit- und ortsabhängige Volumenkraft $\mathfrak{f}^0$ im Innern des Körpers aufbauen. In diesem Fall stehen $\mathfrak{f}^0$ und $\mathfrak{L}^0$, wenn nicht unter sich, so doch beide zusammen mit dem Trägheitswiderständen der einsetzenden elastischen Schwingungen in Gleichgewicht, und bei stationären Schwingungen und vollkommener Elastizität wird die Gleichgewichtsbedingung (51) wenigstens im Zeitmittel erfüllt sein. Wir verstehen daher im folgenden unter unseren Größen, soweit es nötig sein sollte, das Zeitmittel, ohne dieses als solches immer besonders zu kennzeichnen.

b) Als zweite Bedingung denken wir uns die erzeugte Stromwärme q^0 am Entstehungsort sofort an einen mitbewegten Wärmebehälter

isotherm abgeführt, wobei nach früherem keine zusätzliche Kraft erforderlich ist, um die Geschwindigkeit v konstant zu halten. (Praktisch läßt sich die Wärme allerdings nicht Punkt für Punkt, sondern nur am Rand des Leiters über einen stationären Wärmestrom abnehmen, was aber erst im §10 Berücksichtigung finden soll.)

Unter diesen Bedingungen bleibt nicht nur der Bewegungszustand, sondern auch die Ruhemasse, also der gesamte mechanisch-thermodynamische Zustand des Leiters ungeändert zum mindesten im Zeitmittel. Jedoch führt die Stützkraft $\mathfrak{R}$, von Σ aus beurteilt, dem Leiter die zusätzliche mechanische Arbeit ($\mathfrak{R}v$) zu, die wir im Energiesatz (50) berücksichtigen müssen. Zu diesem Zweck transformieren wir die Gleichgewichtsbedingung (51) auf das Inertialsystem Σ' , gegen das sich der Leiter mit der Geschwindigkeit v bewege. Die Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}$ bildet zusammen mit der Leistungsdichte ($j\mathfrak{E}$) den Vierervektor (48) $L = \left\{ \mathfrak{L} \frac{i}{c} (j\mathfrak{E}) \right\}$; desgleichen können wir auch die Kraftdichte $\mathfrak{k}$ durch ihre Leistungsdichte $\frac{c}{i} \kappa_4$ zum Vierervektor

$$\kappa = \{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4\} = \{\mathfrak{k}, \kappa_4\} \quad (52)$$

ergänzen und erhalten in der Vektorsumme $\kappa + L$ einen Vierervektor, dessen Raumkomponente nach (51) im Ruhesystem Σ^0 verschwindet

$$(\kappa + L)^0 = \{\mathfrak{k}^0 + \mathfrak{L}^0, \kappa_4^0 + L_4^0\} = \{0, \kappa_4^0 + L_4^0\}.$$

Er hat also dort die Richtung der Vierergeschwindigkeit Γ^0 bzw. des Einheitsvektors $\Gamma^0/ic = \{0001\}$, und stellt sich somit in *jedem* System Σ dar durch die Vektorgleichung

$$\kappa + L = (\kappa_4^0 + L_4^0) \frac{\Gamma}{ic}. \quad (53)$$

Hierin läßt sich rechts noch κ_4^0 streichen, da im Gegensatz zu $\mathfrak{L}^0$ die Kraft $\mathfrak{k}^0$ in Σ^0 keine Leistung hat, wenigstens nicht im statischen Fall. Sollten bei Wechselfeldern zufolge ungenügender Kompensation von $\mathfrak{L}^0$ elastische Schwingungen einsetzen, so würde $\mathfrak{k}^0$ allerdings Arbeit leisten, die jedoch unter der Voraussetzung stationärer Schwingungen und vollkommener Elastizität: (Existenz eines elastischen Potentials) im Zeitmittel verschwindet. Somit lautet (53), wenn man noch L_4^0 durch die Invariante (ΓL) ausdrückt [s. (49a), (49b) und (49)]:

$$\kappa + L = -\frac{1}{c^2} (\Gamma L) \Gamma = \frac{jL \mathfrak{E}^*}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\Gamma}{c^2}. \quad (54)$$

Die Raumkomponente ist also

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{L} = \frac{jL \mathfrak{E}^*}{1-\beta^2} \frac{v}{c^2} = \frac{q^0 v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}. \quad (55)$$

Demnach ist die Resultante $\mathfrak{k} + \mathfrak{L}$, obwohl sie im Ruhesystem verschwindet, in jedem anderen System von Null verschieden. Diese Verschiebung des Gleichgewichts rührt hauptsächlich her von der bei der Bewegung des Leiters auftretenden Leiterdichte λ (44), die für die Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}$ neue Angriffspunkte schafft (siehe

dazu auch Beispiel § 9). Trotzdem wird der Leiter durch die Kraft $\mathfrak{f} + \mathfrak{Q}$ nicht beschleunigt und dies erklärt sich aus der Trägheit der erzeugten Wärme: Dieim Volumenelement dV^0 des Eigensystems Σ^0 pro Zeitelement dt^0 entwickelte Wärme $dQ^0 = q^0 dV^0 dt^0$ erscheint dem Beobachter in Σ' vermöge ihrer Eigenmasse $dm^0 = \frac{dQ^0}{c^2}$ mit dem mechanischen Impuls $dm^0 \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ausgestattet und dieser mit der Wärme

entstehende Impuls muß natürlich, gleichgültig, ob er mit der Wärme im Leiter verbleibt oder nachträglich mit ihr abgeführt wird, durch das Zeitintegral irgend einer Kraft gedeckt werden. In der Tat leistet dies die Kraft (55). Denn durch Multiplikation mit dem Lorentz-invarianten Raum-Zeitelement $dV dt = dV^0 dt^0$ folgt daraus $(\mathfrak{f} + \mathfrak{Q}) dV dt = \frac{q^0 dV^0 dt^0 v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dm^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Die rechte Seite ist der Zu-

wachs des Systemimpulses $\mathfrak{G} = \frac{m^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, falls die Wärme im Leiter verbleibt; wird sie abgeführt, so bleibt $\mathfrak{G}$ konstant und die rechte Seite spielt jetzt die Rolle des konvektiv abgeführten Impulses $-\delta\mathfrak{P}$ im Sinne der Bewegungsgleichung (11).

Durch skalare Multiplikation mit v entsteht aus (55)

$$(\mathfrak{f} + \mathfrak{Q}, v) = \frac{iL \mathfrak{G}^* \beta^2}{1 - \beta^2} \quad (56)$$

und hiermit läßt sich aus (50a) der in seiner Deutung dort umstrittene Term $(\mathfrak{Q}v)$ überhaupt eliminieren. Dies gibt

$$-\text{div } \mathfrak{S} + (\mathfrak{f}v) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{iL \mathfrak{G}^*}{1 - \beta^2}. \quad (50b)$$

Links steht die *von außen zugeführte* elektrische und mechanische Energie, so daß wir bereits den 1. Hauptsatz vor uns hätten, wenn rechts statt $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ der Zuwachs der *gesamten* elektromagnetischen und mechanisch thermodynamischen Energiedichte u stünde. Es ist aber leicht, die Gleichung diesbezüglich zu ergänzen. Aus der Thermodynamik ist bekannt, daß die gesamte innere Energie der rein dielektrischen* und der diamagnetischen Stoffe im Ruhesystem sich additiv zusammensetzt aus dem elektromagnetischen Anteil η^0 und einem vom elektromagnetischen Feld unabhängigen thermodynamischen Anteil w^0 ** . Diese Additivität wird durch die (lineare) Lorentz-Transformation nicht zerstört. Nun ist im Ruhesystem Σ^0 nach den Voraussetzungen (a und b) die Energiedichte w^0 zwar zeitlich konstant, aber noch ortsabhängig, da wir inhomogene Systeme nicht ausschließen wollen. Infolgedessen ist in einem im System Σ' festgehaltenen Punkt, auf den sich die Gl. (50b) bezieht und durch den sich der Leiter mit der Geschwindigkeit v hindurchschiebt, die lokale Zeitabhängigkeit $\partial w / \partial t$ von Null verschieden und berechnet sich aus

$$0 = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (v \text{ grad } w) = \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } (wv).$$

* ε temperaturunabhängig.

** Genauer: Nicht nur die Energie, sondern der Energie-Impuls-Tensor zerfällt in einen elektrodynamischen und einen thermodynamischen.

wv ist der konvektive Energiestrom der Energiedichte w . Fügt man diese Gleichung zu (50b) hinzu, so entsteht

$$-\operatorname{div} \mathfrak{S} - \operatorname{div}(wv) + (\mathfrak{f}v) = \frac{\partial}{\partial t} (\eta + w) + \frac{j_L \mathfrak{E}^*}{1 - \beta^2} \quad (50c)$$

und in dieser Form haben wir den vollständigen 1. Hauptsatz der Thermodynamik $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + |q|$ vor uns, wobei $\frac{\partial A}{\partial t}$ die einem festen Punkt in Σ pro Volumen- und Zeiteinheit zugeführte Gesamtenergie bedeutet, hier also den Beitrag des elektromagnetischen Energieflusses $\mathfrak{S}$ und des konvektiven Energiestroms wv , sowie die von der Führungskraft $\mathfrak{f}$ von außen zugeführte mechanische Arbeit $(\mathfrak{f}v)$. Weitere Terme der Energiezufuhr existieren nicht [warum die durch die Lorentz-Kraft zugeführte Arbeit $(\mathfrak{Q}v)$ in (50c) explizit nicht auftritt, wird unten erläutert werden]. Diese zugeführte Energie setzt sich nach der rechten Seite von (50c) um in die Erhöhung der Gesamtenergiedichte $u = \eta + w$ des Leiters und in die abgeführte Wärme $|q|$:

$$|q| = \frac{j_L \mathfrak{E}^*}{1 - \beta^2} = \frac{|q^0|}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (57)$$

ist also das Transformationsgesetz der Stromwärme im Einklang zu (7). q und q^0 sind zwar auf die Volumen- und Zeiteinheit des betreffenden Systems bezogen, infolge der Invarianz des vierdimensionalen Volumen-Zeitelements $dV dt = dV^0 dt^0$ gilt die Transformation aber auch für die integralen Wärmen $dQ = q dV dt$ und $dQ^0 = q^0 dV^0 dt^0$.

Daß die Leistung $(\mathfrak{Q}v)$ der Lorentz-Kraft $\mathfrak{Q}$ im Energiesatz (50c) explizit überhaupt nicht auftritt, mag auf den ersten Blick überraschen, doch ist dies völlig in Ordnung: sie ist nämlich bereits im Energiestrom $-\operatorname{div} \mathfrak{S}$ enthalten. Man macht sich dies leicht klar z.B. an Hand eines Kathodenstrahls, den man sich durch einen geladenen Plattenkondensator durchgeschossen denke. Der Energiegewinn, den ein Elektron des Strahls beim Durchqueren des Kondensators erfährt, kann mit der elektrischen Feldstärke E im Kondensator und dem Plattenabstand d durch die Arbeit eEd der Lorentz-Kraft dargestellt werden. Der gleiche Energiegewinn ergibt sich aber auch durch Betrachtung des Energiestroms: Das ringförmige Magnetfeld H_φ , welches der Kathodenstrahl mit sich führt, gibt innerhalb des Kondensators mit der dortigen elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ Anlaß zu einem Energiestrom $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$, der aus dem Unendlichen radial gegen den Kathodenstrahl fließt. Eine leichte Rechnung liefert auch auf diesem Wege den Energiegewinn eEd pro Elektron. Die Arbeit der Lorentz-Kraft und der Energiestrom sind also nur zwei verschiedene Beschreibungsarten ein und desselben Vorgangs, man kann die eine oder die andere Art benutzen, aber nicht beide gleichzeitig. Deshalb hat auch in (50c) die Leistung $(\mathfrak{Q}v)$ der Lorentz-Kraft neben dem Term $-\operatorname{div} \mathfrak{S}$ keine Berechtigung. Jedoch kann $-\operatorname{div} \mathfrak{S}$ hier nicht durch $(\mathfrak{Q}v)$ ersetzt werden, da $\mathfrak{S}$ nun noch den Energiestrom für

die gesamte Stromwärme und für $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ enthält. Die Differenz $(-\operatorname{div} \mathfrak{E}) - (\mathfrak{L}v + \frac{\partial \eta}{\partial t})$ ist aber nicht die gesamte Stromwärme q , da auch $(\mathfrak{L}v)$ nach (57) mit dem Bruchteil $q\beta^2$ zur Wärme beiträgt, was bei der Interpretation von (50a) durch v. LAUE u. a. übersehen wurde.

§9. Ein einfaches Beispiel

Ein unendlich langer zylindrischer Draht, dessen Achse mit der x -Achse zusammenfalle, werde in seinem Ruhesystem vermöge der eingepprägten Feldstärke E_x^0 vom Gleichstrom $j_x^0 = \sigma E_x^0$ durchflossen. Wenn man, wie meist üblich, den Draht als ladungsfrei voraussetzt, so trifft dies nicht ganz zu. Denn der Strom wird durch sein eigenes Magnetfeld $H_\varphi^0 = \frac{1}{2} j^0 r$ gegen die Drahtachse gedrückt, wodurch im Drahtinneren eine Überschußladung der Leitungselektronen entsteht, die so lange anwächst, bis am Elektron die durch sie hervorgerufene radiale elektrische Feldstärke E_r^0 der magnetischen Kraft $[j^0 \mathfrak{B}^0]$ das Gleichgewicht hält. Dann ist der magnetische Anteil der Lorentz-Kraft $\mathfrak{L}^0$ kompensiert. Jedoch sucht die Gegenfeldstärke E_r^0 nun auch die Metallionen am Rand des Leiters nach innen zu ziehen. Dies wird beim Draht automatisch durch elastische Gegenspannungen, bzw. durch eine mechanische Kraftdichte k_r verhindert*, die wir aber hier außer acht lassen können, da sie bei der späteren Verschiebung parallel der x -Achse keine Arbeit leistet. Überhaupt sollen die vorstehenden Bemerkungen nur daran erinnern, daß wir bereits von Haus aus mit einer Raumladung des Drahtes zu rechnen haben; wir können ihr noch eine beliebige Ladung überlagern und wollen die Gesamtladung mit ϱ^0 bezeichnen. Die Feldstärke E_x^0 würde nun die einzelnen Volumenelemente des Leiters mit der Kraft $\varrho^0 E_x^0$ beschleunigen, was wir gemäß (51) durch eine mechanische Gegenkraft $k_x^0 = -\varrho^0 E_x^0$ unterbinden. Das Magnetfeld H_φ^0 gibt nun zusammen mit dem elektrischen Feld den Energiestrom $\mathfrak{E}^0$, der die Joulesche Wärme liefert. Statt ihn zu berechnen und hernach wieder seine Divergenz zu bilden, können wir einfacher die Gl. (50) $-\operatorname{div} \mathfrak{E} = (j \mathfrak{E})$ heranziehen (es ist ja hier $\partial \eta / \partial t = 0$). Sie gibt im Ruhesystem Σ^0 die Wärme $-\operatorname{div} \mathfrak{E}^0 = j_x^0 E_x^0 = q^0$ **.

Nun beschreiben wir die Vorgänge in einem System Σ , gegen das sich der Leiter mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x -Achse bewege. Die Transformation des Feldes auf Σ ändert bekanntlich die Longitudinalkomponente E_x nicht: $E_x = E_x^0$; für den Viererstrom $s^0 = \{j^0, ic\varrho^0\}$ aber gibt sie $s_x = j = \frac{j_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\varrho^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Der zweite Term ist der Konvektionsstrom der Ruheladung ϱ^0 (dagegen darf der Konvektionsstrom

* Diese fehlt im Plasma; daher wird dort die Entladung zu einem Faden zusammengedrückt (Pinch-Effekt).

** E_r^0 liefert keinen Beitrag, da es senkrecht zu j^0 steht.

der Leiterdichte λ nicht hinzu gefügt werden, er ist bereits im ersten Term, der Raumkomponente der Viererleitung, enthalten). Mit dem Strom wächst das Magnetfeld H_φ und desgleichen der Energiestrom $-\text{div } \mathfrak{S} = \frac{i_x^0 E_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\varrho^0 v E_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Der zweite Summand ist die durch die Führungskraft $\mathfrak{f}$ abgeführte mechanische Arbeit $-(\mathfrak{f}v)$, denn da $k_x = \frac{\hbar_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (51): $k_x = -\frac{\varrho^0 E_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und somit $-(\mathfrak{f}v) = \frac{\varrho^0 E_x^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$; der erste Summand ist daher die Wärme $|q| = \frac{|q^0|}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Für $\mathfrak{f}$ und $L_x = \varrho E_x$ ergibt sich nun die Resultante $L_x + k_x = \left(\varrho - \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) E_x = \lambda E_x$, worin λ die nach (43) und (44) definierte Leiterdichte ist. Diese im bewegten Leiter auftretende Ladungsdichte, die so oft nur als belanglose Kuriosität abgehandelt wird, hat also eine wichtige Funktion in der Impulsbilanz: Indem sie dem elektrischen Feld zusätzliche Angriffspunkte verschafft und so das Gleichgewicht zwischen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{L}$ verschiebt, sorgt sie für den notwendigen Impuls, mit dem die im bewegten Leiter entstehende Wärme ausgestattet werden muß. Denn auf Grund von (44) ist $\lambda E_x = \frac{q^0 v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$, womit wir auf die Gl. (55) zurückgekommen sind, deren Bedeutung für den Impulssatz schon erläutert wurde.

§ 10. Berücksichtigung eines Wärmestroms

Die bisherige Bedingung, daß die im Leiter erzeugte Wärme q^0 jeweils *am Ort ihres Entstehens* sofort restlos abgeführt werde, läßt sich praktisch kaum erfüllen. Im Experiment wird man die Wärme nicht dort, wo sie entsteht, sondern an geeigneten anderen Stellen abnehmen. Dem tragen wir Rechnung, indem wir die in Σ^0 abgeführte Wärme nun durch eine beliebige Ortsfunktion γ^0 beschreiben (die z.B. Null ist, wo keine Wärme entnommen wird). Die im Leiter verbleibende Wärme gibt nun Anlaß zu einem Wärmestrom $\mathfrak{T}^0$ von der Quelledichte $\text{div}^0 \mathfrak{T}^0 = q^0 - \gamma^0$, den wir in Σ^0 stationär* halten wollen, damit die Ruhemasse des Leiters nach wie vor zeitlich konstant bleibe.

Die Gleichgewichtsbedingung (51) drücken wir jetzt durch das Gleichgewicht zwischen den elektromagnetischen (Maxwellschen) und den elastischen Spannungen aus. Dazu ersetzen wir die Lorentz-Kraft und ihre Leistung durch die Vektordivergenz eines Tensors, des elektromagnetischen Energie-Spannungs-Tensors M :

$$L = \Delta \text{div } M \quad \left(\text{in Komponenten: } L_i = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} \right).$$

* Was für γ^0 erfordert, daß das Raumintegral über den Leiter $\int \gamma^0 dV^0 = \int q^0 dV^0$ sei.

Wenn auch die richtige Form von M immer noch strittig ist, so besteht doch darin Übereinstimmung, daß die im folgenden ausschließ-
lich in expliziter Form benötigten Komponenten seiner 4. Zeile durch $\{M_{41} M_{42} M_{43}; M_{44}\} = \left\{ -\frac{i}{c} \mathfrak{S}; \eta \right\}$ gegeben sind. Desgleichen stellen wir die elastische Kraftdichte und ihre Leistung als Vektordivergenz eines „Materie-Tensors“ T dar, der gemäß dem leicht verständlichen nebenstehenden Schema die elastischen Spannungen t_{ik} , den „mechanischen“ Energiestrom $\mathfrak{Z}$ samt seiner Impulsdichte g , und die mechanische Energiedichte w enthält:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} t_{ik} & -icg \\ \hline -\frac{i}{c} \mathfrak{Z} & w \end{array} \right|.$$

Im Ruhesystem Σ^0 hat der Vierervektor $\text{Div}(M^0 + T^0)$ nur die Zeitkomponente $\frac{i}{c} \gamma^0$, welche der dem Gesamtsystem entnommenen Leistung, nämlich der abgeführten Wärme γ^0 entspricht, während die Raumkomponenten vermöge der Bedingung (51) verschwinden. Da er somit parallel der Vierergeschwindigkeit Γ des Leiters ist, lautet er in jedem Bezugssystem

$$\text{Div}(M + T) = \frac{i}{c} \gamma^0 \frac{\Gamma}{ic}. \quad (58)$$

Die Zeitkomponente von (58) liefert im Ruhesystem: $-\text{div } \mathfrak{S}^0 - \frac{\partial \eta^0}{\partial t^0} - \text{div } \mathfrak{Z}^0 - \frac{\partial w^0}{\partial t^0} = \gamma^0$. $\mathfrak{Z}^0$ ist hier der Wärmestrom, der wegen $\frac{\partial w^0}{\partial t^0} = 0$ also die Quellendichte $\text{div } \mathfrak{Z}^0 = j^0 \mathfrak{S}^0 - \gamma^0 = q^0 - \gamma^0$ besitzt, wie auch schon oben gefolgert wurde. Im System Σ ergibt sich aus der Zeitkomponente von (58)

$$-\text{div } \mathfrak{S} - \text{div } \mathfrak{Z} - \frac{\partial}{\partial t} (\eta + w) = \frac{\gamma^0}{V_1 - \beta^2}. \quad (59)$$

Der hier auftretende, sog. absolute Energiestrom $\mathfrak{Z}$ enthält außer der zugeführten mechanischen Energie noch den Wärmestrom. Um letzteren herauszulösen, drücken wir $-\frac{i}{c} \text{div } \mathfrak{Z} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k}$ durch die Tensorkomponenten in Σ^0 aus. Hierfür hat man die Transformationsformeln

$$T_{41} = \frac{1}{1 - \beta^2} (T_{41}^0 + i\beta (T_{11}^0 - T_{44}^0) + \beta^2 T_{14}^0)$$

$$T_{42} = \frac{1}{V_1 - \beta^2} (T_{42}^0 + i\beta T_{12}^0)$$

$$T_{43} = \frac{1}{V_1 - \beta^2} (T_{43}^0 + i\beta T_{13}^0)$$

$$T_{44} = \frac{1}{1 - \beta^2} (T_{44}^0 + i\beta (T_{14}^0 + T_{41}^0) - \beta^2 T_{11}^0).$$

Aus der ersten und vierten Transformation ergibt sich einfacher

$$T_{41} + i\beta T_{44} = T_{41}^0 + i\beta T_{11}^0.$$

Ferner lautet die Transformation des Nabla-Operators (Vierervektor!), da $\frac{\partial}{\partial x_4^0}$ (zum mindesten im Zeitmittel) verschwinden soll:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{V_{1-\beta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_4^0} \right) = \frac{1}{V_{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x_1^0};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2^0}; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3^0}.$$

Somit folgt

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} = -i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} T_{44} + \frac{1}{V_{1-\beta^2}} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial T_{4k}^0}{\partial x_k^0} + i\beta \frac{\partial T_{1k}^0}{\partial x_k^0} \right).$$

Da $\mathbf{v}$ nur die x -Komponente v besitzt, ist das erste Glied rechter Hand gleich $-\frac{i}{c} (v \text{ grad } w) = -\frac{i}{c} \text{div}(w\mathbf{v})$; im letzten Glied ist $\sum_{k=1}^3 \frac{T_{1k}^0}{\partial x_k^0} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial t_{1k}^0}{\partial x_k^0}$ die x -Komponente k_1^0 , der durch (51) eingeführten „Führungskraft“ $\mathfrak{f}^0$ im Ruhesystem. Da diese dort völlig durch $-\mathfrak{L}^0$ gegeben, also von der Stärke γ^0 der Wärmeabfuhr unabhängig ist, transformiert sie sich auf Σ für jeden Beobachter wie früher, nämlich $k_1 = \frac{k_1^0}{V_{1-\beta^2}} \star$.

Somit lautet das letzte Glied rechts $\frac{i}{c} \left(\frac{v \mathfrak{f}^0}{V_{1-\beta^2}} \right) = \frac{i}{c} (v \mathfrak{f})$ und man erhält

$$-\text{div } \mathfrak{T} = \frac{c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} = -\text{div}(w\mathbf{v}) - \frac{\text{div}^0 \mathfrak{T}^0}{V_{1-\beta^2}} + (v\mathfrak{f})$$

und endlich aus (59)

$$-\text{div } \mathfrak{S} - \text{div}(w\mathbf{v}) + (v\mathfrak{f}) = \frac{\partial}{\partial t} (\eta + w) + \text{div}^0 \frac{\mathfrak{T}^0}{V_{1-\beta^2}} + \frac{\gamma^0}{V_{1-\beta^2}}. \quad (60)$$

Links steht wiederum die einem Punkt in Σ zugeführte elektrische und mechanische Energie, das zweite Glied rechter Hand ist die im Leiter verbleibende und von ihm mitgeführte Wärme, die mittels des Wärmestroms an die Nachbarschaft unseres Bezugspunktes weitergeleitet wird, und das letzte Glied ist die abgegebene Wärme $\gamma = \frac{\gamma^0}{V_{1-\beta^2}}$. Für diese

gilt also wiederum die Transformation (7); dieselbe Transformation gilt mit Rücksicht auf das zweite Glied auch für die vom Leiter mitgeführte Wärme, denn diese ist $\text{div}^0 \frac{\mathfrak{T}^0}{V_{1-\beta^2}} = \frac{q^0 - \gamma^0}{V_{1-\beta^2}}$.

* $\mathfrak{f}_1$ in Σ ist nicht identisch mit $\Delta i v_1 T$; der Unterschied beruht darauf, daß T in dem Glied T_{14} noch die Impulskomponente des bewegten Wärmestroms enthält.