

1908.

№ 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 26.

1. *Zur Dynamik bewegter Systeme;* *von M. Planck.*

Aus den Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. der Wissensch. vom 13. Juni 1907,
mitgeteilt vom Vorf.

Einleitung.

Seitdem die neueren Forschungen auf dem Gebiete der Wärmestrahlung von experimenteller wie auch von theoretischer Seite her übereinstimmend zu dem Ergebnis geführt haben, daß ein von jeglicher ponderabler Materie entblößtes, lediglich aus elektromagnetischer Strahlung bestehendes System sowohl den Grundgesetzen der Mechanik wie auch den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik in einer Vollständigkeit gehorcht, die bei keiner einzigen der bisher aus diesen Sätzen gezogenen Folgerungen etwas zu wünschen übrig läßt, ist es notwendig geworden, eine Reihe von Vorstellungen und Gesetzmäßigkeiten, die bisher gewöhnlich als feste und fast selbstverständliche Voraussetzungen allen theoretischen Spekulationen auf diesen Gebieten zugrunde gelegt wurden, einer prinzipiellen Revision zu unterziehen; denn eine nähere Betrachtung zeigt, daß einige der einfachsten und wichtigsten unter ihnen in Zukunft nur mehr den Charakter von allerdings weitgehenden und praktisch sehr wichtigen Annäherungen, aber keineswegs mehr genaue Gültigkeit beanspruchen können. Einige Beispiele werden dies näher begründen.

Man ist gewohnt, die gesamte *Energie* eines bewegten ponderablen Körpers aufzufassen als additiv zusammengesetzt aus einem Glied, welches, unabhängig von dem inneren Zustand des Körpers, nur mit seiner Geschwindigkeit variiert: der Energie der fortschreitenden Bewegung, und einem zweiten Glied, welches, unabhängig von der Geschwindigkeit, nur von dem inneren Zustand, nämlich von der Dichte, der Temperatur und der chemischen Beschaffenheit abhängt: der inneren

Energie des Körpers. Diese Zerlegung ist von nun an, prinzipiell genommen, in keinem einzigen Falle mehr gestattet. Denn ein jeder ponderable Körper enthält in seinem Innern einen endlichen angebbaren Betrag von Energie in der Form strahlender Wärme, und wenn dem Körper eine gewisse Geschwindigkeit erteilt wird, so wird diese Wärmestrahlung zugleich mit in Bewegung gesetzt. Für bewegte Wärmestrahlung aber ist, obwohl deren Energie merklich von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängt, eine Trennung der Energie in eine innere und eine fortschreitende Energie durchaus unmöglich; folglich ist eine solche Trennung auch für die Gesamtenergie nicht durchführbar. Mag nun auch in den meisten Fällen die innere Strahlungsenergie weitaus überwogen werden von den übrigen Energiearten, so ist sie doch stets in nachweisbarer Menge vorhanden und unter wohlrealisierbaren Umständen sogar von derselben Größenordnung wie jene. Am merklichsten wird ihr Betrag für gasförmige Körper. Nehmen wir z. B. ein ruhendes ideales einatomiges Gas unter dem Druck p bei der Temperatur T , so ist die im Gase vorhandene Strahlungsenergie αVT^4 , wobei im absoluten C.G.S.-System

$$\alpha = 7,061 \cdot 10^{-15} \quad \text{und} \quad \mathcal{V} = \frac{RNT}{p}.$$

(N die Molzahl, $R = 8,31 \cdot 10^7$.) Dagegen ist die innere Energie des Gases, soweit sie von der lebendigen Kraft der Molekularbewegungen herrührt: $Nc_v T + \text{const.}$, wo c_v , die Molwärme bei konstantem Volumen, in dem nämlichen Maßsystem gleich $3,4,19 \cdot 10^7 = 1,257 \cdot 10^8$. Führt man also dem Gase von außen bei konstantem Volumen Wärme zu, so verteilt sich diese Wärme auf die beiden genannten Energiearten im Verhältnis:

$$\frac{4 \alpha VT^3}{Nc_v} = \frac{4 \alpha RT^4}{c_v p}.$$

Für 0,001 mm Druck und die Temperatur des schmelzenden Platins, also in absolutem Maße

$$p = 1,33 \quad \text{und} \quad T = 1790 + 273 = 2063$$

wird dies Verhältnis, mit Benutzung der angegebenen Zahlen, gleich 0,25; d. h. bei den angenommenen Werten von Druck und Temperatur beträgt die bei der Erwärmung eines ein-

atomigen Gases zur Vermehrung der Strahlungsenergie dienende Wärme bereits den vierten Teil der den Molekularbewegungen zugeute kommenden Wärme.

Ein weiteres Beispiel betrifft die *träge Masse* eines Körpers. Der Begriff der Masse als eines absolut unveränderlichen, weder durch physikalische noch durch chemische Einwirkungen irgendwie zu modifizierenden Quantums gehört seit Newton zu den Fundamenten der Mechanik. Wenn irgend einer Größe, so scheint dieser vor allen anderen das Attribut der Konstanz zuzukommen; sie ist es, welche bis in die neueste Zeit, auch noch in der Hertzschen Mechanik, als die Grundeigenschaft der Materie betrachtet und daher fast in jedem physikalischen Weltsystem als erster Baustein verwendet wird. Und doch läßt sich jetzt ganz allgemein beweisen, daß die Masse eines jeden Körpers von der Temperatur abhängig ist. Denn die träge Masse wird am direktesten definiert durch die kinetische Energie. Da es aber, wie vorhin gezeigt, unmöglich ist, die Energie der fortschreitenden Bewegung eines Körpers vollständig zu trennen von seinem inneren Zustand, so folgt sogleich, daß eine Konstante mit den Eigenschaften der trägen Masse nicht existieren kann. Der Grund hiervon liegt wiederum in der Energie der inneren Wärmestrahlung, welche an der Trägheit des Körpers sicher einen, wenn auch geringen, so doch angebbaren Anteil hat, und zwar mit einem von der Strahlungsdichte, d. h. von der Temperatur abhängigen Gliede. Will man aber die Masse, statt durch die kinetische Energie, durch die Bewegungsgröße definieren, nämlich als den Quotienten der Bewegungsgröße durch die Geschwindigkeit, so kommt man zu keinem anderen Resultat. Denn nach den Untersuchungen von H. A. Lorentz, H. Poincaré und M. Abraham besitzt die innere Wärmestrahlung eines bewegten Körpers, ebenso wie überhaupt jede elektromagnetische Strahlung, eine bestimmte endliche Bewegungsgröße, welche in der gesamten Bewegungsgröße des Körpers mit enthalten ist. Dieselbe hängt aber, ebenso wie die Strahlungsenergie, von der Temperatur ab, und infolgedessen auch die durch sie definierte Masse.

Der Ausweg, zwischen „wirklicher“ und „scheinbarer“ Masse zu unterscheiden, und der ersteren allein die Eigen-

schaft der absoluten Konstanz beizulegen, stellt im Grunde nur eine veränderte Formulierung desselben Sachverhaltes dar. Denn wenn der „wirklichen“ Masse nun auch die Konstanz gewahrt bleibt, so geht ihr dafür auf der anderen Seite ihre bisherige Bedeutung für die kinetische Energie und für die Bewegungsgröße verloren.

An diese Betrachtung schließt sich sogleich ein drittes Beispiel, nämlich die Frage nach der Identität von *träger* und *ponderabler* Masse. Die Wärmestrahlung in einem vollständig evakuierten, von spiegelnden Wänden begrenzten Raume besitzt sicher träge Masse; aber besitzt sie auch ponderable Masse? Wenn diese Frage zu verneinen ist, was wohl das Nächstliegende sein dürfte, so ist damit offenbar die durch alle bisherige Erfahrungen bestätigte und allgemein angenommene Identität von *träger* und *ponderabler* Masse aufgehoben. Man darf nicht einwenden, daß die Trägheit der Hohlraumstrahlung unmerklich klein ist gegen die der begrenzenden materiellen Wände. Im Gegenteil: durch ein gehörig großes Volumen des Hohlraumes läßt sich die Trägheit der Strahlung sogar beliebig groß machen gegen die der Wände. Eine solche, durch dünne starre spiegelnde Wände von dem äußeren Raum vollständig abgeschlossene, im übrigen frei bewegliche Hohlraumstrahlung liefert ein anschauliches Beispiel eines starren Körpers, dessen Bewegungsgesetze von denen der gewöhnlichen Mechanik total abweichen. Denn während er, äußerlich betrachtet, sich durch nichts von anderen starren Körpern unterscheidet, auch eine gewisse träge Masse besitzt und dem Gesetz des Beharrungsvermögens gehorcht, ändert sich seine Masse merklich mit der Temperatur, außerdem hängt sie in bestimmter angebbarer Weise von der Größe der Geschwindigkeit ab, sowie von der Richtung, welche die bewegende Kraft mit der Geschwindigkeit bildet. Dabei haben die Eigenschaften eines solchen Körpers gar nichts Hypothetisches an sich, sondern lassen sich quantitativ in allen Einzelheiten aus bekannten Gesetzen ableiten.

Angesichts der geschilderten Sachlage, durch welche einige der bisher gewöhnlich als festeste Stütze für theoretische Betrachtungen aller Art benutzten Anschauungen und Sätze ihres allgemeinen Charakters entkleidet werden, muß es als eine

Aufgabe von besonderer Wichtigkeit erscheinen, unter den Sätzen, welche bisher der allgemeinen Dynamik zugrunde gelegt wurden, diejenigen herauszugreifen und besonders in den Vordergrund zu stellen, welche sich auch den Ergebnissen der neuesten Forschungen gegenüber als absolut genau bewährt haben; denn sie allein werden fernerhin Anspruch erheben dürfen, als Fundamente der Dynamik Verwendung zu finden. Damit soll natürlich nicht gesagt werden, daß die oben als merklich unexakt gekennzeichneten Sätze künftig außer Gebrauch zu setzen wären; denn die enorme praktische Bedeutung, welche die Zerlegung der Energie in eine innere und eine fortschreitende, oder die Annahme der absoluten Unveränderlichkeit der Masse, oder die Voraussetzung der Identität der trägen und der ponderablen Masse in der ungeheuren Mehrzahl aller Fälle besitzt, wird ja durch die hier angestellten Betrachtungen überhaupt gar nicht berührt, und niemals wird man in die Lage kommen, auf die Benutzung jener so wesentlich vereinfachenden Annahmen Verzicht leisten zu können. Aber vom Standpunkt der allgemeinen Theorie aus wird man unbedingt und prinzipiell unterscheiden müssen zwischen solchen Sätzen, die nur als Annäherungen aufzufassen sind, und solchen, welche genaue Gültigkeit beanspruchen, schon deshalb, weil heute noch gar nicht abzusehen ist, zu welchen Konsequenzen die Weiterentwicklung der exakten Theorie einmal führen wird; sind ja doch häufig genug weitreichende Umwälzungen, auch in der Praxis, von der Entdeckung fast unmerklich kleiner Ungenauigkeiten in einer bis dahin allgemein für exakt gehaltenen Theorie ausgegangen.

Fragen wir daher nach den wirklich exakten Grundlagen der allgemeinen Dynamik, so bleibt von allen bekannten Sätzen zunächst nur übrig das *Prinzip der kleinsten Wirkung*, welches, wie H. v. Helmholtz¹⁾ nachgewiesen hat, die Mechanik, die Elektrodynamik und die beiden Hauptsätze der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf reversible Prozesse umfaßt. Daß in dem nämlichen Prinzip auch die Gesetze einer bewegten Hohlraumstrahlung enthalten sind, habe ich im folgenden (vgl. unten Gleichung (12)) besonders gezeigt. Aber das Prinzip

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. 3. p. 203. 1895.

der kleinsten Wirkung genügt noch nicht zur Fundamentierung einer vollständigen Dynamik ponderabler Körper; denn für sich allein gewährt es keinen Ersatz für die oben als unhaltbar nachgewiesene und daher hier nicht einzuführende Zerlegung der Energie eines Körpers in eine fortschreitende und eine innere Energie. Dagegen steht ein solcher Ersatz in vollem Umfang in Aussicht bei der Einführung eines anderen Theorems: des von H. A. Lorentz¹⁾ und in allgemeiner Fassung von A. Einstein²⁾ ausgesprochenen *Prinzips der Relativität*. Wenn auch von direkten Bestätigungen der Gültigkeit dieses Prinzips nur eine einzige, allerdings sehr gewichtige, zu nennen ist: das Ergebnis der Versuche von Michelson und Morley³⁾, so ist doch andererseits bis jetzt keine Tatsache bekannt, die es direkt hinderte, diesem Prinzip allgemeine und absolute Genauigkeit zuzuschreiben. Andererseits erweist sich das Prinzip als so durchgreifend und fruchtbar, daß eine möglichst eingehende Prüfung wünschenswert erscheint, und diese kann offenbar nur durch Untersuchung der Konsequenzen erfolgen, welche es in sich birgt.

Dieser Erwägung folgend, hielt ich es für eine lohnende Aufgabe, die Schlüsse zu entwickeln, zu welchen eine Kombination des Prinzips der Relativität mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung für beliebige ponderable Körper führt. Es haben sich dabei gewisse weitere Ausblicke ergeben, sowie auch einige Folgerungen, die vielleicht einer direkten experimentellen Prüfung zugänglich sind.

Erster Abschnitt.

Dynamik einer bewegten schwarzen Hohlraumstrahlung.

§ 1.

Die schwarze Hohlraumstrahlung im reinen Vakuum ist unter allen physikalischen Systemen das einzige, dessen thermo-

1) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam p. 809. 1904.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

3) A. A. Michelson u. E. W. Morley, Amer. Journ. of Science (3) 34. p. 333. 1887.

dynamische, elektrodynamische und mechanische Eigenschaften sich, unabhängig vom Widerstreit spezieller Theorien, mit absoluter Genauigkeit angeben lassen. Seine Behandlung ist daher der der übrigen Systeme vorangeschickt. Man denke sich die Strahlung eingeschlossen in ein rings von beweglichen absolut reflektierenden Wänden umgebenes Vakuum, dessen Volumen V so groß gewählt sein möge, daß der Einfluß der Masse der Wände nicht merklich in Betracht kommt. Alle mit dem System vorgenommenen Änderungen denken wir uns reversibel, d. h. so langsam vorgenommen, daß in jedem Augenblick ein stationärer Zustand besteht. Dann ist der Zustand des Systems vollkommen bestimmt durch die Geschwindigkeit q , deren Betrag ein beliebig großer Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit c sein kann, das Volumen V und die Temperatur T . Bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung ist nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik die Änderung der Energie E der Strahlung:

$$dE = A + Q,$$

wobei A die von außen auf die Strahlung ausgeübte mechanische Arbeit, Q die von außen zugeführte Wärme bedeutet; und nach dem zweiten Hauptsatz ist die Änderung der Entropie S der Strahlung:

$$dS = \frac{Q}{T} = \frac{dE - A}{T}.$$

Wir wollen nun mit Hilfe der letzten Gleichung die Eigenschaften der Strahlung in ihrer Abhängigkeit von den unabhängigen Variablen q , V und T berechnen. Die Energie der Strahlung ist:

$$E = \varepsilon \cdot V,$$

wenn ε die räumliche Energiedichte bedeutet, welche nur von q und T abhängt. Was ferner die äußere Arbeit A betrifft, so setzt sich dieselbe additiv zusammen aus der Translationsarbeit und der Kompressionsarbeit. Erstere ist gleich dem Produkt der Geschwindigkeit q und dem Zuwachs der Bewegungsgröße G , letztere gleich dem Produkt des Druckes p und der Abnahme des Volumens V , also:

$$A = q dG - p dV.$$

Nun ist der Druck¹⁾:

$$p = \frac{c^2 - q^2}{3c^2 + q^2} \cdot \varepsilon.$$

Ferner ist die Bewegungsgröße²⁾:

$$G = \frac{4q\varepsilon V}{3c^2 + q^2}.$$

Substituiert man diese Werte in den Ausdruck von A , hierauf die Werte von A und E in die Gleichung für dS , so lautet die letztere:

$$dS = \frac{d(\varepsilon V) - q d\left(\frac{4q\varepsilon V}{3c^2 + q^2}\right) + \frac{c^2 - q^2}{3c^2 + q^2} \varepsilon dV}{T}.$$

Die Bedingung, daß dieser Ausdruck ein vollständiges Differential der drei unabhängigen Variablen q , V und T bildet, wobei zu beachten ist, daß ε nur von q und T , nicht von V abhängt, liefert als notwendige Folgerung die Beziehungen:

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{ac^4}{3} \cdot \frac{3c^2 + q^2}{(c^2 - q^2)^3} T^4$$

1) K. v. Mosengeil, Ann. d. Phys. 22. p. 867. 1907, gibt auf Grund einer von M. Abraham (Elektromagn. Theorie der Strahlung, Leipzig, B. G. Teubner 1905, p. 351) für den Druck eines einzelnen Strahlenbündels auf einen bewegten Spiegel abgeleiteten Formel als Gleichung (42):

$$p = \frac{4\pi}{3c} K(0) \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{2/3}$$

und als Gleichung (44):

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{q^2}{3c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/3}}.$$

Beide Gleichungen kombiniert liefern die obige Beziehung, welche übrigens allgemein gilt, nicht etwa nur für adiabatische Vorgänge.

2) Nach K. v. Mosengeil, l. c. Gleichung (24*) ist nämlich:

$$G = \frac{16\pi q}{3c^3} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot V,$$

wobei nach Gleichung (25*):

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, q\right) \frac{1 + \frac{1}{3} \frac{q^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

und

$$(2) \quad S = \frac{4 a c^4}{3} \cdot \frac{T^3 V}{(c^2 - q^2)^3},$$

wobei die Konstante a dadurch bestimmt ist, daß s für $q=0$ in $a T^4$ übergeht, entsprechend dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz.

Mit diesen Werten ergeben sich für die Energie E , den Druck p und die Bewegungsgröße G der bewegten Hohlraumstrahlung als Funktionen der unabhängigen Variablen q , V und T folgende Ausdrücke:

$$(3) \quad E = \frac{a c^4}{3} \cdot \frac{3 c^2 + q^2}{(c^2 - q^2)^3} T^4 V,$$

$$(4) \quad p = \frac{a c^4}{3} \cdot \frac{T^4}{(c^2 - q^2)^3},$$

$$(5) \quad G = \frac{4 a c^4 q}{3} \cdot \frac{T^4 V}{(c^2 - q^2)^3}.$$

Erteilt man also z. B. der Hohlraumstrahlung eine Beschleunigung, während ihr Volumen V konstant gehalten und keine Wärme von außen zugeführt wird, so daß auch die Entropie S konstant bleibt, so erniedrigt sich nach (2) die Temperatur T der Strahlung im Verhältnis

$$\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{2/3} : 1.$$

Dieses Resultat sowie verschiedene andere damit verwandte Sätze stehen im Einklang mit den Schlüssen, zu welchen die Untersuchung von K. v. Mosengeil¹⁾ geführt hat. Weiter unten (im § 15) wird sich eine noch einfachere und direktere Ableitung für sie ergeben.

Zweiter Abschnitt.

Prinzip der kleinsten Wirkung und Prinzip der Relativität.

§ 2.

Wir betrachten im folgenden einen beliebigen, aus einer gegebenen Anzahl²⁾ gleichartiger oder verschiedenartiger Moleküle

1) K. v. Mosengeil, l. c. Gleichung (47) usw.

2) Diese Anzahl kann auch gleich Null sein. Dann reduziert sich der Körper auf eine Hohlraumstrahlung, wie sie im vorigen Abschnitt behandelt wurde.

bestehenden Körper in einem stationären Zustand, der bestimmt ist durch die unabhängigen Variablen¹⁾ V , T und die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ des Körpers längs den drei Achsen x , y , z eines ruhenden geradlinigen orthogonalen Bezugssystems. Die Größe q der Geschwindigkeit ist dann gegeben durch:

$$q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Ändert man den Zustand des Körpers auf reversible Weise, so gelten nach H. v. Helmholtz²⁾ die aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung fließenden Differentialgleichungen:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \mathfrak{F}_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = \mathfrak{F}_y, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} = \mathfrak{F}_z$$

und

$$(7) \quad \frac{\partial H}{\partial V} = p, \quad \frac{\partial H}{\partial T} = S.$$

Hier bedeutet H das kinetische Potential des Körpers, als Funktion der oben genannten fünf unabhängigen Variablen, wobei jedoch die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ nur in der Verbindung q vorkommen, und $\mathfrak{F}$ bedeutet die von außen auf den Körper wirkende bewegende Kraft.

Man kann diese fünf Differentialgleichungen auch zur Definition des kinetischen Potentials benutzen; doch ist durch sie, wie man sieht, die Funktion H noch nicht vollständig definiert, sondern es bleibt in dem Ausdruck von H , bei bestimmtem $\mathfrak{F}$, p und S , eine additive Konstante, welche keinerlei physikalische Bedeutung besitzt, willkürlich bestimmbar. Eine zweckmäßige Verfügung über diese Konstante werden wir weiter unten (im § 9) treffen und damit die zur Vervollständigung der Definition von H notwendige Ergänzung vornehmen.

Die Bewegungsgröße des Körpers ist dann gegeben durch die Komponenten:

$$(8) \quad \mathfrak{G}_x = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \quad \mathfrak{G}_z = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}$$

1) Über die Existenz einer Zustandsgleichung vgl. A. Byk, Ann. d. Phys. 19. p. 441. 1906.

2) H. v. Helmholtz, Ges. Abh. (Leipzig, J. A. Barth) 3. p. 225. 1895. Dort ist das kinetische Potential mit dem entgegengesetzten Vorzeichen definiert.

bzw. durch die resultierende Bewegungsgröße:

$$(9) \quad G = \frac{\partial H}{\partial q}$$

und die gesamte Energie des Körpers durch:

$$(10) \quad E = q \frac{\partial H}{\partial q} + T \frac{\partial H}{\partial T} - H = \dot{x} \mathfrak{G}_x + \dot{y} \mathfrak{G}_y + \dot{z} \mathfrak{G}_z + T S - H,$$

woraus sich für das Energieprinzip die Gleichung ergibt:

$$(11) \quad dE = \mathfrak{F}_x dx + \mathfrak{F}_y dy + \mathfrak{F}_z dz - p dV + T dS,$$

welche auf ihrer rechten Seite die Translationsarbeit, die Kompressionsarbeit und die von außen zugeführte Wärme enthält.

Alle diese Beziehungen besitzen natürlich auch Gültigkeit für den im vorigen Abschnitt behandelten speziellen Fall der reinen Hohlraumstrahlung, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man für das kinetische Potential den Wert:

$$(12) \quad H = \frac{a c^4 T^4 V}{3 (c^2 - q^2)^2}$$

in die obigen Gleichungen einsetzt.

In der Anwendung auf ponderable Körper wurde nun bisher, auch bei H. v. Helmholtz, stets so verfahren, daß man das kinetische Potential H in zwei Teile zerlegte:

$$H = \frac{1}{2} M q^2 - F,$$

und M , die Masse des Körpers, konstant, dagegen F , die freie Energie des Körpers, unabhängig von q annahm. Dann gehen die Gleichungen (6) in die Gleichungen der gewöhnlichen Mechanik über, und die Gleichungen (7) in die der gewöhnlichen Thermodynamik.

Wie aber das Beispiel der Hohlraumstrahlung zeigt, und wie oben in der Einleitung näher ausgeführt wurde, ist eine derartige Zerlegung, genau genommen, in keinem einzigen Falle zulässig; denn ein jeder ponderable Körper enthält in seinem Innern strahlende Energie in angebbarem Betrage. Wir wollen daher hier jene Zerlegung nicht vornehmen, sondern wollen uns statt dessen auf das Prinzip der Relativität stützen und dessen Konsequenzen für den betrachteten Fall entwickeln.

§ 3.

Das Prinzip der Relativität besagt, daß man statt des bisher benutzten Bezugssystems (x, y, z, t) mit genau dem nämlichen Recht auch das folgende Bezugssystem:

$$x' = \frac{c(x - vt)}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{c^2 t - vx}{c\sqrt{c^2 - v^2}}$$

für die Grundgleichungen der Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik benutzen und daher als „ruhend“ bezeichnen kann. Wir wollen im folgenden alle in dem neuen Bezugssystem gemessenen Größen durch einen hinzugefügten Strich charakterisieren und dementsprechend auch die beiden Bezugssysteme als das „gestrichene“ und das „ungestrichene“ bezeichnen. Dann läßt sich der Inhalt des Relativitätsprinzips auch so aussprechen: *Alle Gleichungen zwischen gestrichenen, ungestrichenen oder auch beiderlei Größen bleiben richtig, wenn man in ihnen die gestrichenen Größen durch die gleichnamigen ungestrichenen und zugleich die ungestrichenen Größen durch die gleichnamigen gestrichenen ersetzt.* Dabei ist $c' = c$ und $v' = -v$ zu setzen.

Dieser allgemeine Satz, der natürlich auch für die obigen Definitionsgleichungen der gestrichenen Koordinaten gilt, liefert für jede gefundene Beziehung eine reziproke Beziehung, welche oft zur Verifikation nützlich ist.

§ 4.

Unsere nächste Aufgabe soll es nun sein, die Beziehung zwischen einer jeden der bisher benutzten Größen und der gleichnamigen gestrichenen Größe aufzustellen. Dies kann, wie sich zeigen wird, in vollkommen eindeutiger Weise geschehen, so daß wir schließlich z. B. aus der Energie eines für ein Bezugssystem ruhenden Körpers die Energie desselben Körpers in dem anderen Bezugssystem, für welches er eine gewisse endliche Geschwindigkeit besitzt, berechnen können.

Zunächst ergibt sich für die gestrichenen Geschwindigkeitskomponenten ($\dot{x}' = dx'/dt'$ usw.) auf rein mathematischem Wege:

$$(13) \quad \dot{x}' = \frac{c^2(\dot{x} - v)}{c^2 - v\dot{x}}, \quad \dot{y}' = \frac{c\sqrt{c^2 - v^2}\dot{y}}{c^2 - v\dot{x}}, \quad \dot{z}' = \frac{c\sqrt{c^2 - v^2}\dot{z}}{c^2 - v\dot{x}}.$$

Ferner¹⁾:

$$(14) \quad \sqrt{\frac{c^2 - q'^2}{c^2 - q^2}} = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} = -\frac{c^2 + v \dot{x}'}{c \sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{V'}{V} = \frac{dt}{dt'}.$$

Wir wollen jetzt nachweisen, daß die *Entropie* des von uns betrachteten Körpers in bezug auf das gestrichene System den nämlichen Wert besitzt wie in bezug auf das ungestrichene System. Man könnte diesen Beweis ganz allgemein auf den engen Zusammenhang der Entropie mit der Wahrscheinlichkeit gründen, deren Größe unmöglich von der Wahl des Bezugssystems abhängen kann; indessen ziehen wir hier einen direkteren, von der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ganz unabhängigen Weg vor.

Wir denken uns den Körper aus einem Zustand, in welchem er für das ungestrichene Bezugssystem ruht, durch irgend einen reversibeln adiabatischen Prozeß in einen zweiten Zustand gebracht, in welchem er für das gestrichene Bezugssystem ruht. Bezeichnet man die Entropie des Körpers für das ungestrichene System im Anfangszustand mit S_1 , im Endzustand mit S_2 , so ist wegen der Reversibilität und Adiabasie $S_1 = S_2$. Aber auch für das gestrichene Bezugssystem ist der Vorgang reversibel und adiabatisch, also haben wir ebenso:

$$S'_1 = S'_2.$$

Wäre nun S'_1 nicht gleich S_1 , sondern etwa $S'_1 > S_1$, so würde das heißen: Die Entropie des Körpers ist für dasjenige Bezugssystem, für welches er in Bewegung begriffen ist, größer als für dasjenige Bezugssystem, für welches er sich in Ruhe befindet. Dann müßte nach diesem Satze auch $S_2 > S'_2$ sein; denn im zweiten Zustand ruht der Körper für das gestrichene Bezugssystem, während er für das ungestrichene Bezugssystem in Bewegung begriffen ist. Diese beiden Ungleichungen widersprechen aber den oben aufgestellten beiden Gleichungen. Ebenso wenig kann $S'_1 < S_1$ sein; folglich ist $S'_1 = S_1$, und allgemein:

$$(15) \quad S' = S,$$

1) Alle diese Relationen gelten übrigens auch für ein ungleichförmig bewegtes Medium, in welchem die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung stetig von Punkt zu Punkt variiert. In diesem Falle ist unter V ein unendlich kleines Volumenelement zu verstehen.

d. h. die Entropie des Körpers hängt nicht von der Wahl des Bezugssystems ab.

§ 5.

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung: Wenn ein Körper, der im Anfangszustand für das ungestrichene System ruht, auf irgend eine Weise reversibel und adiabatisch auf die Geschwindigkeit $\dot{x} = v$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$ gebracht wird, und zwar so, daß das Endvolumen V_2 mit dem Anfangsvolumen V_1 in der Beziehung steht:

$$(16) \quad V_2 = V_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

so ist der Endzustand 2 für das gestrichene System in allen Stücken identisch mit dem Anfangszustand 1 für das ungestrichene System.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der Überlegung, daß der Zustand des Körpers durch fünf unabhängige Variablen bestimmt ist, als welche wir außer den drei Geschwindigkeitskomponenten das Volumen und die Entropie wählen können. Nun sind nach den Voraussetzungen im Endzustand für das gestrichene System die drei Geschwindigkeitskomponenten des Körpers $\dot{x}_2'$, $\dot{y}_2'$ und $\dot{z}_2' = 0$, ferner nach (15) die Entropie $S_2' = S_2 = S_1$, endlich das Volumen nach (14):

$$V_2' = V_2 \frac{c^2 + v \dot{x}_2'}{c \sqrt{c^2 - v^2}} = V_2 \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = V_1,$$

also besitzen alle fünf Zustandsvariablen im Endzustand 2 für das gestrichene System die nämlichen Werte wie im Anfangszustand 1 für das ungestrichene System, wodurch der obige Satz bewiesen ist.

§ 6.

Nun denken wir uns eine beliebige Anzahl verschiedenartiger voneinander getrennter Körper, die anfänglich für das ungestrichene System ruhen und alle eine gleiche Temperatur T_1 besitzen und einem gleichen Druck p_1 unterworfen sind. Jeder dieser Körper für sich werde irgendwie reversibel und adiabatisch auf die Geschwindigkeit v gebracht und sein Endvolumen nach der Beziehung (16) reguliert. Dann besitzen schließlich alle Körper wiederum eine gemeinsame Temperatur T_2 und einen gemeinsamen Druck p_2 . Denn für das

gestrichene System befindet sich jeder Körper schließlich in dem nämlichen Zustand wie anfänglich für das ungestrichene System, also sind für das gestrichene System die Endtemperaturen und die Enddrucke alle einander gleich. Dasselbe gilt aber auch für das ungestrichene System; denn zwei Körper, welche für ein Bezugssystem die nämliche Temperatur und den nämlichen Druck aufweisen, d. h. sich miteinander im thermischen und mechanischen Gleichgewicht befinden, besitzen dieselbe Eigenschaft auch für jedes andere Bezugssystem.

Wir können also folgenden Satz aussprechen: Verschiedenartige Körper von gemeinsamer Temperatur und gemeinsamem Druck, welche einzeln für sich reversibel und adiabatisch auf irgend einem Wege von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit v gebracht werden, so daß für jeden Körper das Volumen sich im Verhältnis $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}:1$ verkleinert, nehmen wiederum gemeinsame Temperatur und gemeinsamen Druck an. Kennt man daher für einen einzigen Körper die durch einen solchen Prozeß hervorgebrachte Änderung der Temperatur und des Druckes, so kennt man die Änderung für jeden beliebigen Körper in der Natur.

Nun ist speziell für eine schwarze Hohlraumstrahlung nach (2) für $q_1 = 0$, $q_2 = v$

$$S_1 = \frac{4 a T_1^3 V_1}{3}, \quad S_2 = \frac{4 a c^4 T_2^3 V_2}{3 (c^2 - v^2)^2},$$

folglich, da nach der Voraussetzung

$$S_1 = S_2 \quad \text{und} \quad V_2 = V_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$T_2 = T_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

und nach (4):

$$p_1 = p_2,$$

d. h. der gemeinsame Enddruck ist gleich dem gemeinsamen Anfangsdruck. Die beiden letzten Beziehungen gelten also allgemein für jeden beliebigen Körper, der dem genannten Prozeß unterworfen wird.

Daraus folgt auch, daß man die Volumenbedingung (16) des § 5 ersetzen kann durch die einfachere Bedingung, daß der Enddruck p_2 gleich ist dem Anfangsdruck p_1 . Dann kann man sagen: Bei einer reversibeln adiabatischen isobaren (d. h.

$p = \text{const.}$) Beschleunigung eines beliebigen Körpers von der Geschwindigkeit 0 auf beliebigem Wege bis zur Geschwindigkeit v verkleinert sich sowohl das Volumen als auch die Temperatur des Körpers im Verhältnis $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}:1$. In diesem Satze ist natürlich die Richtung der Geschwindigkeit v unwesentlich. Daher gilt derselbe Satz auch, wenn man statt der in der x -Achse gerichteten Geschwindigkeit v die beliebig gerichtete Geschwindigkeit q einsetzt.

§ 7.

Der letzte Satz ermöglicht es nun, die Beziehung zwischen den Werten, welche die Temperatur und der Druck eines beliebig bewegten Körpers für die beiden von uns benutzten Bezugssysteme besitzt, ganz allgemein anzugeben. Wir denken uns einen mit einer beliebig gerichteten Geschwindigkeit bewegten Körper gegeben. Die Größe der Geschwindigkeit bezeichne für das ungestrichene System q , für das gestrichene System q' . Wenn der Körper für das ungestrichene Bezugssystem aus dem gegebenen Zustand reversibel, adiabatisch und isobar zur Ruhe gebracht wird, so ist sein Volumen von V auf

$$\frac{V}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}},$$

seine Temperatur von T auf

$$\frac{T}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

gewachsen. Wenn der Körper aber für das gestrichene Bezugssystem aus dem gegebenen Zustand reversibel, adiabatisch und isobar zur Ruhe gebracht wird, so ist sein Volumen von V' auf

$$\frac{V'}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{c^2}}},$$

seine Temperatur von T' auf

$$\frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{c^2}}}$$

gewachsen. Nun ist aber der so erhaltene Ruhezustand des

Körpers im ungestrichenen System in allen Stücken identisch mit dem vorhin erhaltenen Ruhezustand im gestrichenen System. Denn die Bedingungen, unter denen der Satz des § 5 gilt, sind hier alle erfüllt, wenn man sich den Körper aus dem Ruhezustand für das ungestrichene System reversibel, adiabatisch und isobar durch den ursprünglich gegebenen Zustand hindurch in den Ruhezustand für das gestrichene System gebracht denkt. Folglich ist:

$$p = p', \quad \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \frac{V'}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{c^2}}},$$

oder:

$$(17) \quad \frac{V'}{V} = \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{c^2 - q'^2}{c^2 - q^2}}, \quad p' = p, \quad S' = S$$

als *allgemein gültige Beziehung zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Variabeln.*

§ 8.

Jetzt handelt es sich vor allem um den Vergleich der Werte des *kinetischen Potentials* in den beiden Bezugssystemen. Zu diesem Zwecke schreiben wir zunächst die Differentialgleichungen (7) nach dem Relativitätsprinzip für das gestrichene System:

$$(18) \quad \frac{\partial H'}{\partial V'} = p', \quad \frac{\partial H'}{\partial T'} = S'.$$

Diese beiden Gleichungen liefern mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) und die Beziehungen (17):

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial V} \left(H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} \right) = \frac{\partial H}{\partial V}, \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} \right) = \frac{\partial H}{\partial T}.$$

Ehe wir die Integration vornehmen, leiten wir noch die entsprechenden Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten y und z ab. Dazu müssen wir außer den Differentialgleichungen (6) in bezug auf das gestrichene System:

$$(20) \quad \frac{d}{dt'} \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}'} = \mathfrak{F}_{x'}, \quad \frac{d}{dt'} \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}'} = \mathfrak{F}_{y'}, \quad \frac{d}{dt'} \frac{\partial H'}{\partial \dot{z}'} = \mathfrak{F}_{z'}$$

die Beziehungen zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Komponenten der bewegenden Kraft $\mathfrak{F}$ benutzen. Um diese zu finden, betrachten wir zunächst einen speziellen Fall, nämlich einen unendlich kleinen, mit der Elektrizitäts-

menge e geladenen, diathermanen festen Körper, der sich in irgend einem evakuierten elektromagnetischen Felde befindet. Dann ist für das ungestrichene System:

$$\mathfrak{E}_x = e \mathfrak{E}_x + \frac{e}{c} (\dot{y} \mathfrak{H}_z - \dot{z} \mathfrak{H}_y),$$

$$\mathfrak{E}_y = e \mathfrak{E}_y + \frac{e}{c} (\dot{z} \mathfrak{H}_x - \dot{x} \mathfrak{H}_z),$$

$$\mathfrak{E}_z = e \mathfrak{E}_z + \frac{e}{c} (\dot{x} \mathfrak{H}_y - \dot{y} \mathfrak{H}_x),$$

wobei $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldintensität bezeichnet. Die nämlichen Gleichungen gelten nach dem Relativitätsprinzip, wenn man sämtliche Größen, außer e und c , mit Strichen versieht. Daraus ergeben sich mit Rücksicht auf die Relationen (13), sowie auf die Beziehungen¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}'_x &= \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{H}'_x &= \mathfrak{H}_x, \\ \mathfrak{E}'_y &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c} \mathfrak{H}_z \right), & \mathfrak{H}'_y &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c} \mathfrak{E}_z \right), \\ \mathfrak{E}'_z &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c} \mathfrak{H}_y \right), & \mathfrak{H}'_z &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{H}_z - \frac{v}{c} \mathfrak{E}_y \right) \end{aligned}$$

die folgenden Gleichungen zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Kraftkomponenten:

$$(21) \quad \mathfrak{E}'_x = \mathfrak{E}_x - \frac{v \dot{y}}{c^2 - v \dot{x}} \mathfrak{E}_y - \frac{v \dot{z}}{c^2 - v \dot{x}} \mathfrak{E}_z,$$

$$(22) \quad \mathfrak{E}'_y = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{E}'_z = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \mathfrak{E}_z.$$

Die beiden letzten Beziehungen (22) nehmen wir als allgemein gültig an; sie liefern mit (6) und (20) kombiniert:

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}'} = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}.$$

Nun ist nach (13) und (14):

$$(23) \quad \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}'} = \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}'} = \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}} \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + v \dot{x}'} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} \right).$$

und:

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{c^2 - v \dot{x}}{c \sqrt{c^2 - v^2}}.$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 909. 1905.

Daraus folgt:

$$d \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} \right) = d \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}$$

und integriert:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} \right) = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \\ \text{ebenso:} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} \right) = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}. \end{array} \right.$$

Die Integrationskonstante, eine absolute Konstante, verschwindet, weil für $q' = q$ H' in H übergeht.

§ 9.

Nun liefern die vier Gleichungen (19) und (24) integriert:

$$H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} = H + \text{const.}$$

Die Konstante hängt nicht ab von V , T , $\dot{y}$, $\dot{z}$; wohl aber kann sie noch von $\dot{x}$, oder, nach (14), von $c^2 - q^2 / c^2 - q'^2$ abhängen. Wir schreiben daher:

$$H' \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2}} = H + f \left(\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2} \right)$$

und bestimmen den allgemeinsten Ausdruck der Funktion f .
Zunächst haben wir:

$$(25) \quad \frac{H'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} - \frac{H}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}} \cdot f \left(\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2} \right).$$

Da die Funktion H nur von q , V und T abhängt, und da V' und T' mit V und T nur durch die Beziehungen (17) verbunden sind, so ist die rechte Gleichungsseite, ebenso wie die linke, von der Form:¹⁾

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}} \cdot f \left(\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q'^2} \right) = Q' - Q,$$

1) Man sieht dies am leichtesten ein, wenn man einen beliebigen Wert q'' nimmt und die drei Ausdrücke

$$\frac{H'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} - \frac{H}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \frac{H''}{\sqrt{c^2 - q''^2}} - \frac{H'}{\sqrt{c^2 - q'^2}}$$

und

$$\frac{H}{\sqrt{c^2 - q^2}} - \frac{H''}{\sqrt{c^2 - q''^2}}$$

addiert.

wobei Q allein von q abhängt. Daraus folgt notwendig:

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}} f\left(\frac{c^2 - q^2}{c^3 - q'^2}\right) = \frac{C}{\sqrt{c^2 - q'^2}} - \frac{C}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

wenn C eine absolute Konstante bedeutet.

Dies in (25) substituiert ergibt als gesuchte Beziehung zwischen H' und H :

$$\frac{H' - C}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{H - C}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Da nun die Funktion $H - C$ genau den nämlichen Differentialgleichungen (6) und (7) genügt wie die Funktion H , so können wir uns ohne weiteres in alle vorhergehenden Gleichungen statt H die Funktion $C - H$ gesetzt denken, und wollen fortan den letzteren Ausdruck einfach mit H bezeichnen. Dann ergibt sich:

$$(26) \quad \frac{H'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{H}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Mit anderen Worten: Wenn die Konstante $C = 0$ gesetzt wird, so bedeutet das keinerlei physikalische Einschränkung, sondern nur eine zweckmäßige Ergänzung der Definition des kinetischen Potentials, welche durch die Differentialgleichungen (6) und (7), wie schon dort hervorgehoben wurde, noch nicht vollkommen eindeutig festgelegt wird.

§ 10.

Nachdem nun die allgemeine Beziehung zwischen H' und H gefunden ist, ergibt sich direkt aus den Differentialgleichungen des Prinzips der kleinsten Wirkung der Zusammenhang der Werte, welche irgend eine physikalische Größe für die beiden von uns benutzten Bezugssysteme besitzt. Betrachten wir zunächst die *Bewegungsgröße*, deren Komponenten im gestrichenen System sind:

$$(27) \quad \mathfrak{G}'_x = \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}'}, \quad \mathfrak{G}'_y = \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}'}, \quad \mathfrak{G}'_z = \frac{\partial H'}{\partial \dot{z}'}.$$

Während sich der Zusammenhang der y - und z -Komponenten der Bewegungsgröße direkt aus der Vergleichung mit (8) und (13) als

$$(28) \quad \mathfrak{G}'_y = \mathfrak{G}_y, \quad \mathfrak{G}'_z = \mathfrak{G}_z$$

ergibt, ist der zwischen den x -Komponenten $\mathfrak{G}'_x$ und $\mathfrak{G}_x$ wesentlich verwickelterer Natur.

Zunächst erhalten wir hierfür nach (27) in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\mathfrak{G}_x' = \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x'} + \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x'} + \frac{\partial H'}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial x'} + \frac{\partial H'}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial H'}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x'},$$

Dabei ist nach (26), (14) und (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(H \sqrt{\frac{c^2 - q'^2}{c^2 - v^2}} \right) = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \frac{v c \sqrt{c^2 - v^2}}{(c^2 - v \dot{x})^2} H, \\ \frac{\partial H'}{\partial \dot{y}} &= \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial H'}{\partial \dot{z}} = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \\ \frac{\partial H'}{\partial V} &= \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \frac{\partial H}{\partial V}, \quad \frac{\partial H'}{\partial T} = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v \dot{x}} \frac{\partial H}{\partial T}, \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x'} &= \frac{(c^2 - v \dot{x})^2}{c^2 (c^2 - v^2)}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x'} = -\frac{v \dot{y} (c^2 - v \dot{x})}{c^2 (c^2 - v^2)}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial x'} = -\frac{v \dot{z} (c^2 - v \dot{x})}{c^2 (c^2 - v^2)}, \\ \frac{\partial V}{\partial x'} &= -\frac{v (c^2 - v \dot{x})}{c^2 (c^2 - v^2)} V, \quad \frac{\partial T}{\partial x'} = -\frac{v (c^2 - v \dot{x})}{c^2 (c^2 - v^2)} T. \end{aligned}$$

Dies ergibt durch Substitution mit Rücksicht auf (8) und (7):

$$\mathfrak{G}_x' = \frac{1}{c \sqrt{c^2 - v^2}} \{ (c^2 - v \dot{x}) \mathfrak{G}_x + v H - v \dot{y} \mathfrak{G}_y - v \dot{z} \mathfrak{G}_z - v p V - v T S \},$$

oder mit Einführung der Energie E aus (10):

$$(29) \quad \mathfrak{G}_x' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{G}_x - \frac{v (E + p V)}{c^2} \right).$$

Wenn man statt der Energie E die Gibbssche „Wärmefunktion bei konstantem Druck“ R einführt:

$$(30) \quad R = E + p V,$$

deren Änderung bei isobaren Prozessen die zugeführte Wärme angibt, so lautet die letzte Beziehung einfacher:

$$(31) \quad \mathfrak{G}_x' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{G}_x - \frac{v}{c^2} R \right).$$

§ 11.

Differentiiert man die Gleichung (29) nach der Zeit t :

$$\frac{d \mathfrak{G}_x'}{d t} = \frac{d \mathfrak{G}_x'}{d t'} \cdot \frac{d t'}{d t} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left\{ \frac{d \mathfrak{G}_x}{d t} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{d E}{d t} + p \frac{d V}{d t} + V \frac{d p}{d t} \right) \right\},$$

so folgt daraus mit Berücksichtigung von (27), (20), (14) und (11)

die Beziehung zwischen den x -Komponenten der *Kraft* $\mathfrak{F}$, nämlich:

$$(32) \quad \mathfrak{F}_x' = \mathfrak{F}_x - \frac{v}{c^2 - v^2} (\mathfrak{F}_y \dot{y} + \mathfrak{F}_z \dot{z} + V \dot{p} + T \dot{S}).$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der oben gefundenen (21), so ergibt sich, daß jene keine allgemeine Bedeutung besitzt, sondern nur dann immer gilt, wenn $\dot{p} = 0$ und $\dot{S} = 0$, d. h. wenn der Prozeß isobar und adiabatisch verläuft. In der Tat ist diese Eigenschaft charakteristisch für den damals betrachteten Vorgang: der Bewegung eines elektrisch geladenen, diathermanen festen Körpers in einem evakuierten elektromagnetischen Felde.

Endlich mögen hier noch Platz finden die allgemeinen Beziehungen zwischen den Werten, welche die Energie des Körpers sowie die geleistete äußere Arbeit und die zugeführte Wärme für beide Bezugssysteme besitzt.

Für die *Energie* E' haben wir nach (10):

$$E' = \dot{x}' \mathfrak{G}_x' + \dot{y}' \mathfrak{G}_y' + \dot{z}' \mathfrak{G}_z' + T' S' - H',$$

folglich durch Substitution der bereits abgeleiteten Beziehungen:

$$(33) \quad E' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left\{ E - v \mathfrak{G}_x - \frac{v(\dot{x} - v)}{c^2 - v^2} p V \right\}.$$

Für die in (30) definierte *Wärmefunktion* R gilt im gestrichenen Bezugssystem die einfache Beziehung:

$$(34) \quad R' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (R - v \mathfrak{G}_x).$$

Die bei einer unendlich kleinen reversiblen Zustandsänderung des Körpers von außen geleistete *Translationsarbeit* ist für das gestrichene Bezugssystem:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F}_x' dx' + \mathfrak{F}_y' dy' + \mathfrak{F}_z' dz' &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left\{ \mathfrak{F}_x dx + \mathfrak{F}_y dy + \mathfrak{F}_z dz \right. \\ &\quad \left. - v dt \left(\mathfrak{F}_x + \frac{\dot{x} - v}{c^2 - v^2} (V \dot{p} + T \dot{S}) \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ferner die *Kompressionsarbeit*:

$$(36) \quad -p' dV' = -\frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} p dV - \frac{v c \sqrt{c^2 - v^2}}{(c^2 - v^2)^2} p V d\dot{x},$$

endlich die *zugeführte Wärme*:

$$(37) \quad T' dS' = \frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} T dS.$$

§ 12.

Die im vorigen abgeleiteten Beziehungen zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Größen lassen sich zum Teil einfacher darstellen, wenn man diejenigen Ausdrücke aufsucht, welche für die Transformation von einem Bezugssystem auf das andere invariant sind. Solche Invarianten sind

$$y, z, p, S, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z, \frac{H}{\sqrt{c^2 - q^2}}, G \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{q}, \text{ usw.},$$

ferner die Differentialausdrücke

$$\sqrt{c^2 - q^2} dt, H dt, V dt, T dt, \mathfrak{F}_y dt, \mathfrak{F}_z dt, E dt - \mathfrak{G}_x dx, \\ R dt - \mathfrak{G}_x dx, \text{ usw.}$$

Alle diese Größen ändern ihren Wert nicht, wenn man sie durch die entsprechenden gestrichenen Größen ersetzt.

Daraus folgt auch, daß das für das Prinzip der kleinsten Wirkung charakteristische, von einem bestimmten Anfangszustand 1 bis zu einem bestimmten Endzustand 2 genommene Zeitintegral:

$$W = \int_1^2 H dt,$$

welches man als die dem betreffenden Vorgang entsprechende „Wirkungsgröße“ bezeichnen kann, für das gestrichene Bezugssystem den nämlichen Wert besitzt wie für das ungestrichene. Nimmt man hinzu den Satz, daß für die Wirkungsgröße ein ganz bestimmtes Elementarquantum¹⁾ existiert:

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ Erg sec},$$

so kann man auch sagen: Einer jeden Veränderung in der Natur entspricht eine bestimmte, von der Wahl des Bezugssystems unabhängige Anzahl von Wirkungselementen. Es versteht sich, daß durch diesen Satz die Bedeutung des Prinzipes der kleinsten Wirkung nach einer neuen Seite hin erweitert wird. Doch soll an dieser Stelle auf diese und verwandte Fragen nicht näher eingegangen werden.

1) M. Planck, Vorlesungen über Wärmestrahlung (Leipzig, J. A. Barth) p. 162. 1906.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen.

§ 13.

Die wichtigste Folgerung aus den allgemeinen, im vorigen Abschnitt aufgestellten Beziehungen betrifft die Abhängigkeit des physikalischen Zustandes eines Körpers von seiner Geschwindigkeit. Es läßt sich nämlich ganz allgemein zeigen, daß das kinetische Potential H und somit auch *alle Zustandsgrößen sich unmittelbar als Funktionen der Geschwindigkeit, des Volumens und der Temperatur angeben lassen, sobald sie für die Geschwindigkeit Null als Funktionen des Volumens und der Temperatur bekannt sind.*

Wir wollen zu diesem Zwecke mit $H_0, p_0, S_0, E_0 \dots$ diejenigen Funktionen der beiden Variablen V und T bezeichnen, in welche die Funktionen $H, p, S, E, \dots$ der drei Variablen q, V, T übergehen, wenn man in ihnen $q=0$ setzt. Ferner wollen wir mit $H'_0, p'_0, S'_0, E'_0 \dots$ diejenigen Funktionen der drei Variablen q, V, T bezeichnen, in welche die Funktionen $H_0, p_0, S_0, E_0, \dots$ der beiden Variablen V und T übergehen, wenn man in ihnen statt V

$$V' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} V$$

und statt T

$$T' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} T$$

einsetzt.

Nun gehen wir von der Beziehung (26) aus und setzen darin $q'=0$. Dann folgt mit Rücksicht auf (17) in der soeben eingeführten Bezeichnung:

$$(38) \quad H = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} H'_0,$$

und hierdurch ist H als Funktion der drei Variablen q, V und T dargestellt, falls H_0 als Funktion der beiden Variablen V und T bekannt ist. Durch H sind dann nach (6) und (7) alle anderen physikalischen Zustandsgrößen bestimmt. So erhält man zunächst für den Druck:

$$(39) \quad p = p'_0.$$

Ist also der Druck des ruhenden Körpers durch die gewöhnliche Zustandsgleichung als Funktion von Volumen und Temperatur bekannt, so folgt daraus unmittelbar die Zustandsgleichung des bewegten Körpers. Ebenso ist die Entropie:

$$(40) \quad S = S'_0.$$

Ferner sind die Komponenten der Bewegungsgröße:

$$\mathfrak{G}_x = G \frac{\dot{x}}{q}, \quad \mathfrak{G}_y = G \frac{\dot{y}}{q}, \quad \mathfrak{G}_z = G \frac{\dot{z}}{q},$$

wobei G , die resultierende Bewegungsgröße, nach (38):

$$\begin{aligned} G = \frac{\partial H}{\partial q} = & - \frac{q}{c \sqrt{c^2 - q^2}} H'_0 \\ & + \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right)'_0 \frac{c q V}{(c^2 - q^2)^{3/2}} + \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)'_0 \frac{c q T}{(c^2 - q^2)^{3/2}} \right\}, \\ (41) \quad G = & \frac{q}{c^2 - q^2} V p'_0 + \frac{q}{c^2 - q^2} T S'_0 - \frac{q}{c \sqrt{c^2 - q^2}} H'_0. \end{aligned}$$

Ferner ist die Energie nach (10):

$$(42) \quad E = \frac{q^2}{c^2 - q^2} V p'_0 + \frac{c^2}{c^2 - q^2} T S'_0 - \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} H'_0.$$

Bedenkt man, daß $E_0 = T S_0 - H_0$ und

$$E'_0 = \frac{c T}{\sqrt{c^2 - q^2}} S'_0 - H'_0,$$

so kann man auch schreiben:

$$(43) \quad E = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} E'_0 + \frac{q^2}{c^2 - q^2} V p'_0.$$

Endlich ist die Wärmefunktion R nach (30):

$$(44) \quad R = \frac{c^2}{c^2 - q^2} V p'_0 + \frac{c^2}{c^2 - q^2} T S'_0 - \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} H'_0$$

oder, da:

$$\begin{aligned} R'_0 = & \frac{c V}{\sqrt{c^2 - q^2}} p'_0 + \frac{c T}{\sqrt{c^2 - q^2}} S'_0 - H'_0, \\ (45) \quad R = & \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} R'_0. \end{aligned}$$

Mit Einführung der Wärmefunktion R schreibt sich die Bewegungsgröße G nach (41) einfacher:

$$(46) \quad G = \frac{q}{c^2} R = \frac{q}{c \sqrt{c^2 - q^2}} R'_0.$$

§ 14.

Die besonderen Beziehungen, welche in den vorstehenden Gleichungen enthalten sind, lassen sich alle zusammenfassen in eine einzige Differentialgleichung, welche für die Funktion H der drei Variablen q , V , T ganz allgemein gilt. Setzt man nämlich in die Gleichung (46) für G den Ausdruck $\partial H / \partial q$, und für R den Wert $E + p V$, so ergibt sich mit Rücksicht auf (10) die Gleichung:

$$(47) \quad T \frac{\partial H}{\partial T} + V \frac{\partial H}{\partial V} - \frac{c^2 - q^2}{q} \frac{\partial H}{\partial q} - H = 0.$$

Diese Differentialgleichung stellt den allgemeinen Ausdruck für die Anwendung des Relativitätsprinzips auf das kinetische Potential dar. Ihr allgemeines Integral ist durch (38) ausgedrückt, wovon man sich auch leicht direkt überzeugen kann. Danach ist das kinetische Potential H eine homogene Funktion ersten Grades der drei Variablen T , V und $\sqrt{c^2 - q^2}$.

§ 15.

Machen wir nun zunächst eine spezielle Anwendung auf die schwarze Hohlraumstrahlung. Alle Bewegungsgesetze einer Hohlraumstrahlung ergeben sich hiernach direkt aus den bekannten einfachen thermodynamischen Formeln für eine ruhende Hohlraumstrahlung. Für eine solche ist nämlich nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz:

$$E_0 = a T^4 V.$$

Ferner ist der Maxwellsche Strahlungsdruck:

$$p_0 = \frac{1}{3} a T^4,$$

und die Entropie ruhender Strahlung:

$$S_0 = \int \frac{dE_0 + p_0 dV}{T} = \frac{4}{3} a T^3 V.$$

Aus diesen für $q = 0$ gültigen Werten folgen definitionsgemäß (§ 13) die Ausdrücke:

$$E'_0 = \frac{a c^5 T^4 V}{(c^2 - q^2)^{5/2}}, \quad p'_0 = \frac{a c^4 T^4}{3 (c^2 - q^2)^2}, \quad S'_0 = \frac{4 a c^4 T^3 V}{3 (c^2 - q^2)^2},$$

und mit deren Hilfe nach (39), (40), (43) und (46) die für eine beliebige Geschwindigkeit q gültigen Werte:

$$p = \frac{\alpha c^4 T^4}{3(c^2 - q^2)^2}, \quad S = \frac{4 \alpha c^4 T^3 V}{3(c^2 - q^2)^2},$$

$$E = \frac{\alpha c^4 (3c^2 + q^2)}{3(c^2 - q^2)^3} T^4 V, \quad G = \frac{q}{c^2} (E + p V) = \frac{4 \alpha c^4 q}{3(c^2 - q^2)^3} T^4 V$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen des § 1.

§ 16.

Durch die Bewegungsgröße G eines Körpers ist auch dessen *träge Masse* bestimmt. Diese Größe, welche in der reinen Mechanik eine so fundamentale Rolle spielt, sinkt in der allgemeinen Dynamik zu einem sekundären Begriff herab. Denn sobald die Bewegungsgröße nicht mehr proportional der Geschwindigkeit ist, ist die Masse eines Körpers nicht mehr konstant; außerdem gelangt man zu einer ganz verschiedenen Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, je nachdem man die Bewegungsgröße G durch die Geschwindigkeit q dividiert oder nach der Geschwindigkeit q differenziert, wobei dann noch besonders anzugeben ist, in welcher Weise die Differentiation erfolgt: ob isotherm, ob adiabatisch usw. Wiederum ein anderer Wert für die Masse ergibt sich im allgemeinen, wenn man von der Energie E ausgeht und diese nach $q^2/2$ differenziert. Wie man diese verschiedenen Ausdrücke benennt, ist natürlich Definitionssache.

Wir wollen hier unter „Masse“ M eines Körpers diejenige von der Geschwindigkeit des Körpers unabhängige Größe verstehen, welche man erhält, wenn man die Bewegungsgröße G durch die Geschwindigkeit q dividiert und in diesem Quotienten $q = 0$ setzt, also in unserer Bezeichnungsweise nach (46):

$$(46) \quad M = \left(\frac{G}{q} \right)_0 = \frac{R_0}{c^2} = \frac{E_0 + p V_0}{c^2}.$$

Diese Größe hängt im allgemeinen noch von der Temperatur T und dem Volumen V des Körpers ab.

Setzt man in dem Ausdruck G/q die Geschwindigkeit q nicht gleich Null, so nennen wir den Quotienten, wie üblich¹⁾,

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. p. 186.

die „transversale“ Masse des Körpers, während dagegen der Differentialquotient dG/dq die „longitudinale“ Masse vorstellt. Bei der longitudinalen Masse hat man jedoch die „isotherm-isochores“ Masse zu unterscheiden von der „adiabatisch-isobaren“ Masse usw.; denn der Differentialquotient hat nur dann einen bestimmten Wert, wenn der Weg der Differentiation angegeben wird. Für die spezielle Geschwindigkeit $q = 0$ gehen transversale und longitudinale Masse aller Arten ineinander, d. h. in (48) über.

Die Masse einer ruhenden Hohlraumstrahlung ist daher nach (5):

$$\frac{4 a T^4 V}{3 c^3},$$

die transversale Masse einer bewegten Hohlraumstrahlung:

$$\frac{G}{q} = \frac{4 a c^4 T^4 V}{3 (c^2 - q^2)^3},$$

die longitudinale isotherm-isochores Masse derselben¹⁾:

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{4 a c^4 (c^2 + 5 q^2)}{3 (c^2 - q^2)^4} T^4 V,$$

die longitudinale adiabatisch-isochores Masse¹⁾:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_{s, V} = \frac{4 a c^4 (3 c^2 - q^2)}{9 (c^2 - q^2)^4} T^4 V,$$

die longitudinale adiabatisch-isobare Masse dagegen:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_{s, p} = \frac{4 a c^6 T^4 V}{3 (c^2 - q^2)^4}.$$

§ 17.

Auffallend ist an der Beziehung (48) vor allem der enge Zusammenhang der Masse eines Körpers mit der Wärmefunktion R_0 . Da die Masse M leicht in Gramm zu messen ist, so läßt sich danach die Größe von R_0 unmittelbar im absoluten C.G.S.-System angeben. Doch kann dieser Wert nicht direkt auf thermodynamischem Wege geprüft werden; denn die reine Thermodynamik läßt in dem Ausdruck der Wärmefunktion, wie auch in dem der Energie, eine additive

1) Vgl. K. von Mosengeil, l. c. § 9. Dort ist die Masse nicht, wie hier, durch die Bewegungsgröße, sondern durch die Energie definiert.

Konstante unbestimmt. In dieser Hinsicht kommt also die Beziehung (48) im wesentlichen auf eine Ergänzung der thermodynamischen Definition der Energie hinaus.

Dagegen eröffnet sich eine Aussicht zur experimentellen Prüfung der Theorie durch die Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Wärmefunktion R_0 mit der Temperatur und dem Volumen sowie der chemischen Beschaffenheit. Denn nach der Gleichung (48) wird durch jede Wärmeaufnahme bzw. -abgabe die träge Masse eines Körpers verändert, und zwar ist die Zunahme der Masse immer gleich der Wärmemenge, welche bei einer isobaren Veränderung des Körpers von außen aufgenommen wird, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.¹⁾ Dabei ist besonders bemerkenswert, daß dieser Satz nicht nur für reversible Prozesse, sondern ganz allgemein auch für jede irreversible Zustandsänderung gilt; denn die Beziehung zwischen der Wärmefunktion R und der von außen zugeleiteten Wärme gründet sich direkt auf den ersten Hauptsatz der Wärmetheorie. Infolge der Größenordnung von c^2 ist freilich die durch einfache Erwärmung oder Abkühlung eines Körpers bedingte Massenänderung desselben so minimal, daß sie sich der direkten Messung wohl für immer entziehen wird. Ein stärkerer Einfluß wäre schon von der Heranziehung chemischer Wärmetönungen zu erwarten, obwohl auch hier der Effekt kaum meßbar sein dürfte.

Berechnen wir z. B. die Abnahme der Masse von $1\frac{1}{2}$ Mol Knallgas ($H_2 + \frac{1}{2}O_2 = 18$ g), welches bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur zu 1 Mol flüssigem Wasser kondensiert wird. Hierfür ist die Wärmeentwicklung im C.G.S.-Maßsystem:

$$r = 68400 \cdot 419 \cdot 10^5 = 2,87 \cdot 10^{13},$$

1) Wesentlich dieselbe Folgerung hat schon A. Einstein (Ann. d. Phys. 18. p. 639. 1905) aus der Anwendung des Relativitätsprinzips auf einen speziellen Strahlungsvorgang gezogen, allerdings unter der nur in erster Annäherung zulässigen Voraussetzung, daß die gesamte Energie eines bewegten Körpers sich additiv zusammensetzt aus seiner kinetischen Energie und aus seiner Energie für ein in ihm ruhendes Bezugssystem. Dort findet sich auch ein Hinweis auf eine mögliche Prüfung der Theorie durch Beobachtungen an Radiumsalzen.

folglich die Abnahme der Masse:

$$\frac{r}{c^2} g = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ mg},$$

eine immer noch verschwindend kleine Größe.

§ 18.

Nach der hier entwickelten Theorie hat man sich also im Innern eines jeden Körpers einen Energievorrat vorzustellen, dessen Betrag so kolossal ist, daß die von uns für gewöhnlich beobachteten Erwärmungs- und Abkühlungsvorgänge, ja sogar ziemlich tief eingreifende, mit beträchtlichen Wärmetönungen verbundene chemische Umwandlungen, ihn nur um einen unmerklichen Bruchteil verändern. Das gilt bis herab zu den tiefsten erreichbaren Temperaturen; denn sowohl die spezifische Wärme eines Körpers wie auch die Reaktionswärmen chemischer Prozesse behalten bis dicht an den absoluten Nullpunkt heran ihre Größenordnung bei. Läßt man also die Temperatur eines ruhenden Körpers (bei konstantem äußeren Druck) unbegrenzt abnehmen, so konvergiert seine innere Energie nicht etwa gegen Null, was übrigens auch schon deshalb ausgeschlossen ist, weil die Reaktionswärme zweier chemisch aufeinander wirkender Körper auch bei den tiefsten Temperaturen endlich bleibt, sondern sie behält im Gegenteil bis auf verhältnismäßig ganz unwesentliche Glieder den nämlichen Wert wie für beliebige endliche Temperaturen. Diesen Energievorrat, der dem Körper bei Null Grad absolut verbleibt, und demgegenüber alle in den gewöhnlichen physikalischen und chemischen Prozessen vorkommenden Wärmetönungen minimal sind, wollen wir hier als die „latente Energie“ des Körpers bezeichnen. Die latente Energie ist von der Temperatur und von den Bewegungen der chemischen Atome ganz unabhängig¹⁾, ihr Sitz ist also innerhalb der chemischen Atome zu suchen; ihrer Art nach könnte sie potentieller, aber ebensowohl auch kinetischer Natur sein. Denn es hindert nichts, anzunehmen, und wäre sogar, namentlich vom elektrodynamischen Standpunkt aus betrachtet, sehr wohl verständlich, daß innerhalb der chemischen

1) Vgl. hierzu z. B. die Betrachtungen von E. Bose, Physik. Zeitschr. 5. p. 356 u. 731. 1904.

Atome gewisse stationäre Bewegungsvorgänge von der Art stehender Schwingungen stattfinden, die mit keiner oder nur mit unmerklicher Ausstrahlung verbunden sind. Die Energie dieser Schwingungen, welche sehr bedeutend sein kann, würde sich dann, solange die Atome unverändert bleiben, auf keine andere Weise verraten als durch die Trägheit, welche sie einer translatorischen Beschleunigung des schwingenden Systems entgegensetzt, und durch die offenbar damit in engem Zusammenhang stehende Gravitationswirkung. Zur weiteren Ausbildung dieser Vorstellungen reichen freilich die aus der kinetischen Gastheorie hergebrachten Anschauungen, welche die träge Masse als etwas primär Gegebenes und die chemischen Atome als starre Körper oder als einfache materielle Punkte voraussetzen, nicht mehr aus; namentlich müßte auch das Boltzmannsche Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung im statistischen Gleichgewicht hier seine Bedeutung verlieren. Aber daß auf dem Gebiet der intraatomistischen Vorgänge die einfachen Hypothesen der kinetischen Gastheorie tiefgreifender Ergänzungen bedürfen, wird ja schon durch den Anblick des Quecksilberspektrums nahegelegt und ist wohl allseitig anerkannt.

Wenn nach dem Gesagten die Existenz und die Größe der latenten Energie in der Regel nur indirekt aus theoretischen Überlegungen erschlossen werden kann, so gibt es doch eine bestimmte Bedingung, unter der sie direkt thermodynamisch in Wirksamkeit tritt: das ist der Eintritt einer Veränderung oder Zertrümmerung der chemischen Atome; denn in diesem Falle muß nach dem Energieprinzip latente Energie frei werden. So gering die Aussicht auf die Realisierung eines derartigen radikalen Vorganges noch vor einem Dezennium erscheinen mochte, so ist sie doch jetzt durch die Entdeckung der radioaktiven Elemente und deren Umwandlungen in unmittelbare Nähe gerückt, und in der Tat liefert die Beobachtung der starken fortdauernden Wärmeentwicklung radioaktiver Stoffe geradezu eine direkte Stütze für die Annahme, daß die Quelle jener Wärmeentwicklung eben nichts anderes ist als die latente Energie der Atome. Mit einer großen latenten Energie ist nach der Beziehung (48) auch eine große Masse verbunden. Damit steht gut in Übereinstimmung der Umstand, daß die radioaktiven Elemente ein besonders hohes Atomgewicht be-

sitzen und auch, daß ihre Verbindungen zu den spezifisch schwersten gehören.

Nach J. Precht¹⁾ entwickelt 1 g Atom Radium, wenn es von einer hinreichend dicken Bleischicht umgeben ist, pro Stunde $134,4.225 = 30240$ g cal. Dies ergibt nach (48) für die Stunde eine Verminderung der Masse um

$$\frac{30240 \cdot 419 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{20}} \text{ g} = 1,41 \cdot 10^{-6} \text{ mg}$$

oder in einem Jahre eine Verminderung der Masse um 0,012 mg. Dieser Betrag ist allerdings, besonders mit Rücksicht auf das hohe Atomgewicht des Radiums, immer noch so winzig, daß er wohl zunächst außer dem Bereich der möglichen Erfahrung liegt.

Übrigens könnte es von vornherein zweifelhaft erscheinen, ob für eine solche Messung die Wage das richtige Instrument ist. Denn die Beziehung (48) gilt nicht für die ponderable, sondern für die träge Masse, und es ist schon in der Einleitung hervorgehoben worden, daß diese beiden Größen keineswegs identisch sind, wenigstens dann nicht, wenn man einer Hohlraumstrahlung im Vakuum, welche doch sicher Trägheit besitzt, keine Gravitationswirkung zuschreibt. Indessen sind nach allen unseren Erfahrungen Trägheit und Gravitation in jeder Beziehung, für die verschiedenartigsten Stoffe, von den leichtesten bis zu den schwersten, so eng miteinander verbunden, daß man wohl ohne Bedenken den Ursprung dieser beiden Wirkungen an der nämlichen Stelle suchen darf, nämlich in der latenten Energie der chemischen Atome. Nimmt man die Gravitation als direkt proportional der latenten Energie an, so wäre die von der Temperatur abhängige träge Masse ein wenig, aber nur äußerst wenig größer als die von der Temperatur ganz unabhängige ponderable Masse. In jedem Falle aber müßte sich eine merkliche Verminderung der latenten Energie auch in einer merklichen Verminderung der ponderablen Masse äußern. Ob nun ein solcher Einfluß jemals direkt nachweisbar sein wird, muß ja die Zukunft lehren. Hier handelte es sich nur darum, die Konsequenzen zu entwickeln, welche sich aus der Kombination des Relativitätsprinzips mit

1) J. Precht, Ann. d. Phys. 21. p. 599. 1906.

dem Prinzip der kleinsten Wirkung für die Auffassung der Trägheit ergeben.

Vierter Abschnitt.

Einführung neuer unabhängiger Variabeln.

§ 19.

Der im vorigen Abschnitt für das kinetische Potential H gefundene Ausdruck (38) besitzt die nämliche Form wie der von mir in einer früheren Untersuchung¹⁾ für das kinetische Potential eines einzelnen bewegten materiellen Punktes mit der konstanten Masse M aufgestellte Ausdruck:

$$(49) \quad -M c^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} + \text{const.}$$

Indessen ist die Übereinstimmung keine vollständige; denn dazu wäre erforderlich, daß $M = -H'_0/c^2$, was nach der Gleichung (48) keineswegs zutrifft. Der Grund dieses scheinbaren Widerspruches liegt darin, daß die als kinetisches Potential bezeichnete Größe H hier etwas anderes bedeutet als dort, wie man am einfachsten aus der Betrachtung der Bewegungsgleichungen (6) erkennt. Diese Gleichungen finden sich in meiner früheren Abhandlung genau in der nämlichen Form wie hier, aber die Differentialquotienten $\partial H/\partial \dot{x}$, $\partial H/\partial \dot{y}$, $\partial H/\partial \dot{z}$ besitzen dort eine andere Bedeutung, weil die Differentiation dort nicht isotherm-isochor, sondern adiabatisch-isobar zu erfolgen hat. Denn der materielle Punkt bewegt sich ohne Zuführung äußerer Wärme unter dem konstanten äußeren Druck Null, also nach § 6 mit veränderlichem Volumen und veränderlicher Temperatur. Um den genannten Unterschied deutlich zu machen, will ich hier die frühere Größe H mit K bezeichnen, so daß die Gleichungen entstehen:

$$(50) \quad \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right)_{p, s} = \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right)_{v, T}, \text{ usw.,}$$

wobei nach (49):

$$(51) \quad K = -M c^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} + \text{const.}$$

Die vollständige Übereinstimmung dieser Beziehungen mit den Formeln des vorigen Abschnittes zeigt sich am deutlichsten,

1) Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 8. p. 140. 1906.

wenn wir in den Gleichungen (6) und (7) des Prinzips der kleinsten Wirkung ganz allgemein die unabhängigen Variablen V und T durch p und S ersetzen. Dieselben lauten dann:

$$(52) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right)_{p, S} = \mathfrak{F}_x, \text{ usw.},$$

$$(53) \quad \left(\frac{\partial K}{\partial p} \right)_S = -V, \quad \left(\frac{\partial K}{\partial S} \right)_p = -T,$$

wobei

$$(54) \quad K = H - pV - TS.$$

Daß diese Beziehungen in der Tat mit (6) und (7) ganz gleichbedeutend sind, erkennt man am einfachsten direkt, indem man den Wert (54) von K in die Gleichungen (52) und (53) substituiert und die Differentiation von H bei den unabhängigen Variablen p und S ersetzt durch die bei den unabhängigen Variablen V und T .

Bedenkt man nun, daß nach (10) und (30):

$$K = q \frac{\partial H}{\partial q} - pV - E = qG - R,$$

so folgt durch Substitution in (46):

$$K = - \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} R_0'.$$

Um diese Beziehung mit der früher von mir gewonnenen (51) vergleichen zu können, müssen wir uns auf adiabatisch-isobare Vorgänge beschränken; denn nur für solche ist (51) abgeleitet worden. Für einen adiabatisch-isobaren Vorgang ist aber nach § 6

$$V' = \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

konstant, und ebenso

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

konstant; also ist dann R_0' unabhängig von q . Wir schreiben daher R_0 statt R_0' , und erhalten dann nach (48):

$$K = - \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} R_0 = - Mc \sqrt{c^2 - q^2}$$

in voller Übereinstimmung mit (51).

(Eingegangen 6. März 1908.)